

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas

Pablo Vinicius Almeida Azevedo
Orientador: Prof. Dr. Valério Ramos Batista

Dissertação apresentada junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC, para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Santo André - SP
2009

As superfícies de costa Triplamente Periódicas

Este exemplar corresponde á redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Pablo Vinicius Almeida Azevedo e aprovada pela comissão julgadora.

Santo André, 16 de dezembro de 2009

Prof. Dr. Valério Ramos Batista
Orientador

Banca examinadora:

1. Prof. Dr. Valério Ramos Batista (Orientador) - UFABC
2. Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva - UFABC
3. Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos - UFSCar

Dissertação apresentada junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA UFABC**

Bibliotecário: *****

Azevedo, Pablo Vinícius Almeida
A999m As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas
Superfícies Mínimas/Pablo Vinícius Almeida Azevedo- - Santo André, [S.P.:
s.n.], 2010.

Orientador: Valério Ramos Batista
Tese (Mestrado) - Universidade Federal do ABC, Centro
de Matemática, Computação e Cognição.

1. Superfícies Mínimas. 2. Geometria Diferencial. 3. Riemann,
Superfícies de. I. Ramos Batista, Valério. II. Universidade Federal do ABC.
Centro de Matemática, Computação e Cognição.
III. Título.

Título em inglês: The triply periodic Costa surfaces.

Palavras-chaves em inglês (Keywords): 1. Minimal surfaces. 2. Differential geometry. 3. Riemann surfaces.

Área de concentração: Geometria Diferencial

Titulação: Mestre em Matemática Aplicada

Banca Examinadora: Prof. Dr. Valério Ramos Batista (UFABC)
Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva (UFABC)
Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos (UFSCar)

Data da defesa: 16/12/2009

Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática Aplicada

Dissertação de Mestrado defendida em 16 de dezembro de 2009 e
aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof. Dr. Valério Ramos Batista

Prof. Dr. Márcio Fabiano da Silva

Prof. Dr. Guillermo Antonio Lobos

Dedico este trabalho à Sofia, Thais, Pedro e Gabriel.

Agradecimentos

Agradeço:

À Bolsa Institucional da UFABC, que no período de 01/12/2007 a 30/11/2009 financiou este trabalho de mestrado. E ao Professor Doutor Valério Ramos Batista por sua tolerância e generosidade, além de tudo incentivar-me neste trabalho.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	2
2.1	Variedades Diferenciáveis, Vetores, Plano Tangente e Métrica Riemanniana	2
2.2	Superfícies de Riemann, Funções e Formas Diferenciáveis	4
2.3	Integração de Formas Diferenciáveis	6
2.4	O Primeiro Grupo Fundamental	8
2.5	Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta	8
2.6	Espaços de Recobrimento e Recobrimento Holomorfo Ramificado	9
2.7	Superfícies Mínimas, Parâmetros Isotérmicos e Funções Harmônicas	12
2.8	Homologia Singular	15
2.9	Feixes, Gérmenes de Funções e Continuação Analítica	16
3	A Função Elítica Z	18
3.1	O comportamento geométrico de Z	18
3.2	A equação algébrica do toro em termos de Z	22
4	A Superfície de Costa	25
5	As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas	27
5.1	O teorema principal	27
5.2	A função z em \bar{S} e a aplicação de Gauß em termos de z	29
5.3	A diferencial altura dh em termos de z	37
6	O Problema dos Períodos	41
6.1	Solução	41
7	Mergulho das Superfícies de Costa Triplamente Periódicas	46
	Bibliografia	49

Lista de Figuras

3.1	Célula fundamental de toro.	18
3.2	Célula fundamental de toro retangular com algumas involuções e pontos indicados.	19
3.3	Célula fundamental de toro rômboico com algumas involuções indicadas. . .	20
3.4	(a) valores de Z ; (b) valores de Z'	22
3.5	Intervalo $[\lambda, 1/\lambda]$ percorrido com velocidades distintas.	23
4.1	(a) A superfície Costa; (b) a peça fundamental P da superfície Costa triplamente periódica.	26
5.1	Uma superfície de Costa triplamente periódica.	27
5.2	(a) Célula fundamental de \bar{S} ; (b) seu equivalente homeomorfo.	29
5.3	(a) \bar{S} ; (b) seu equivalente homeomorfo.	29
5.4	(a) Metade de \bar{S} ; (b) o toro $T = \rho(\bar{S})$	30
5.5	(a) Valores de z em pontos especiais; (b) os correspondentes valores de g nestes pontos; (c) os correspondentes valores de Z em T	31
5.6	(a) Relação entre os valores de g e z	32
5.7	Valores complexos de g nas retas de simetrias de \bar{S}	33
5.8	Valores de dz e dh em \bar{S}	40
6.1	(a) A metade esquerda de \bar{S} ; (b) sua imagem pela ρ	41
6.2	(a) O vetor período na curva de homologia (1) em relação às curvas (2) e (8).	42

Lista de Tabelas

Resumo

A tese de mestrado versa sobre o artigo *A family of triply periodic Costa surfaces*, que apresenta uma demonstração completa de unicidade e convergência para uma família contínua a um parâmetro de Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas. No artigo, a demonstração é norteadada por simulações numéricas em MatLab, que motivam as provas teóricas. Entretanto, o presente trabalho não contemplará esta parte numérica, por dar prioridade aos argumentos Geométricos do artigo.

De fato, a Geometria é uma importante ferramenta para outras áreas, mesmo da própria Matemática, não apenas por facilitar demonstrações, mas também por torná-las acessíveis. Dentre as sub-áreas da Matemática, obviamente a mais visual é a Geometria, que mesmo equipada com técnicas como Variáveis Complexas, Diferenciabilidade, Homologia, etc., não perde sua concretividade: curvas, superfícies, rotação, etc.

O trabalho [RamosBatista2] é inovador, pois apresenta as primeiras superfícies mínimas triplamente periódicas cuja construção explícita não pode ser realizada pelo Método de Conjugação de Plateau. Além da unicidade e convergência mencionadas acima, traz uma descrição explícita dos membros-limite. É raro encontrar um estudo tão completo como neste artigo.

A família de superfícies é obtida pelo *método de construção reversa* introduzido por Karcher em 1989. Tal método consiste dos seguintes passos: 1) esboço da superfície; 2) compactificação; 3) hipóteses de simetria; 4) equação algébrica; 5) obtenção dos dados de Weierstraß; 6) verificação de involuções e hipóteses de simetria; 7) análise de períodos; e 8) mergulho. As ferramentas teóricas deste método são apresentadas no Capítulo 2 da presente Tese de Mestrado.

Abstract

This present work deals with the article *A family of triply periodic Costa surfaces*, which brings a complete demonstration for including uniqueness and convergence of a continuous one-parameter family of Triply Periodic Minimal Surfaces. In the paper, the theoretical proofs are motivated by numerical evidences obtained through the software MatLab. However, this present work will not include the numerics, because we give preference to the geometric arguments of the paper.

Indeed, Geometry is an important tool for other research areas, even inside Mathematics itself, not just for easing demonstrations a lot, but also because it makes them accessible. Among the sub-areas in Mathematics, obviously the most visually appealing *is* the Geometry. Even equipped with techniques like Complex Variables, Differentiability and Homology, it never loses its concreteness: curves, surfaces, rotations, etc.

The paper [RamosBatista2] is innovative because presents the first triply periodic minimal surfaces of which the explicit construction cannot be accomplished by Plateau's Conjugate Method. Besides uniqueness and convergence mentioned above, it brings an explicit description of the limit-members. Such a complete study is rare to find.

The family of surfaces is obtained via the *reverse construction method* introduced by Karcher in 1989. This method consists of the following steps: 1) drafting the sought-after surface; 2) compactification; 3) symmetry hypotheses; 4) algebraic equation; 5) Weierstraß data; 6) checking involutions from symmetry hypotheses; 7) period analysis; 8) embeddedness. The main theoretical tools for this method are presented in Chapter 2 of this Master Thesis.

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho baseia-se no estudo do artigo “A family of triply periodic Costa surfaces”, que apresenta uma demonstração completa da unicidade e convergência para uma família contínua a 1-parâmetro de Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas. A demonstração é norteadada por simulações numéricas em MatLab, que motivam as provas teóricas.

O artigo supracitado é inovador, pois apresenta as primeiras superfícies mínimas triplamente periódicas cuja construção explícita não pode ser realizada pelo Método de Conjugação de Plateau. Além disso, elas formam uma única família, contínua a um-parâmetro, cujos membros-limite descrevem-se explicitamente. Um trabalho completo como este é raro de se encontrar. Nele, dentre as ferramentas principais, utilizam-se teoria básica de Geometria Diferencial, Variáveis Complexas e Superfícies Mínimas. A solução dos períodos segue uma demonstração teórica norteadada por evidências numéricas, sendo estas a motivação para chegar a um formalismo bem sucedido.

Dada uma superfície regular S em \mathbb{R}^3 , descrita somente por sua topologia e simetrias, pretende-se descobrir se ela pode ser mínima. A resposta a esta pergunta pode ter várias implicações na Teoria de Superfícies Mínimas. Por exemplo, em [Schoen] prova-se que, salvo o catenóide, não existe S completa, com curvatura total finita e dois fins mergulhados.

Em 1989, H. Karcher desenvolveu um poderoso método que permite reduzir a questão a um simples sistema de equações, chamado *construção reversa*. As equações representam os “problemas de período”, e envolvem integrais transcendententes que relacionam parâmetros livres. Neste passo, o cálculo numérico pode indicar uma escolha dos parâmetros que resolva as equações, e isso motiva a demonstração de existência da superfície.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Variedades Diferenciáveis, Vetores, Plano Tangente e Métrica Riemanniana

Definição 1.1. Uma variedade diferenciável de dimensão 2, ou uma 2-variedade C^∞ , é um espaço topológico M de Hausdorff com base enumerável, munido de uma família $\Sigma(M)$ de homeomorfismos $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, U_i aberto de M , V_i aberto \mathbb{R}^2 , tal que:

- (1) $\bigcup_i U_i = M$;
- (2) $\forall i, j$ com $U_i \cap U_j = W \neq \emptyset$ e $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe C^∞ em W ;
- (3) Dado um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$, onde U é subconjunto aberto de M , V é aberto em \mathbb{R}^2 , e $\{(\varphi, U)\} \cup \Sigma(M)$ satisfazendo (2), tem-se $(\varphi, U) \in \Sigma(M)$. Ou seja, $\Sigma(M)$ é maximal.

Os elementos de $\Sigma(M)$ são chamados cartas da variedade ou sistema de coordenadas.

Observação: As aplicações inversas $\varphi_i^{-1} : V_i \rightarrow U_i$ também serão chamadas cartas da variedade.

Definição 1.2. Sejam M e N 2-variedades C^∞ . Uma função $f : M \rightarrow N$ é dita diferenciável em M se $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é de classe C^∞ , para toda carta (ϕ, U) de M e toda carta (φ, V) de N , tais que $f(U) \subset V$. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$, para toda carta (φ, U) de M é também dita diferenciável, e o conjunto de todas as funções diferenciáveis neste sentido é representado por $\mathcal{F}(M)$. Mais adiante introduziremos o conceito de superfície de Riemann, e neste caso o termo *função diferenciável*, será usado em um sentido mais particular.

Definição 1.3. Se M é uma 2-variedade C^∞ e $v_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g]$ e $v_p[f \cdot g] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$, diremos que v_p é um *vetor tangente* a M em p .

Exemplo: Se M é uma 2-variedade C^∞ e $(z = (x, y), U) \in \Sigma(M)$ e $z^{-1} = (u, v)$, com u, v parâmetros em \mathbb{R}^2 , defina

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial u}(z(p)),$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p = \frac{\partial(f \circ z^{-1})}{\partial v}(z(p)),$$

$\forall f \in \mathcal{F}(M)$. Então $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p$ e $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p$ são vetores tangentes a M em p .

Proposição 1.4. *Seja M uma 2-variedade C^∞ e $(z = (x, y), U)$ uma carta local em $p \in M$. O conjunto de todos os vetores tangentes a M em p é um espaço vetorial de dimensão 2, gerado por $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_p$ e $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_p$. Este espaço independe da carta $(z = (x, y), U)$ e iremos indicá-lo por T_pM .*

Prova: [Gray] - p 512.

Definição 1.5. O espaço T_pM acima descrito é o *plano tangente* a M em p .

Definição 1.6. Sejam M e N 2-variedades C^∞ , $p \in M$ e $v_p \in T_pM$. Se $f : M \rightarrow N$ é diferenciável, a aplicação $(df)_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$, dada por $(df)_p(v_p)[g] = v_p[g \circ f] \forall g \in \mathcal{F}(M)$ é dita a *diferencial* de f em p .

Definição 1.7. Uma curva C^1 por partes é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow M$, I intervalo aberto, semi-aberto ou fechado de \mathbb{R} , em que $z \circ \gamma$ é C^1 por partes, qualquer que seja $(z, U) \in \Sigma(M)$ para a qual a composição faz sentido. Dizemos que $\gamma'(t_0)[f] = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma(t))$, $t_0 \in I$, para toda $f \in \mathcal{F}(M)$, é o *vetor tangente* a γ em t_0 .

Observação: Se $\gamma(t_0) = p$, então $\gamma'(t_0) \in T_pM$.

Definição 1.8. O *traço* de γ é o conjunto $\{\gamma\} = \gamma(I)$.

Definição 1.9. Seja M uma 2-variedade C^∞ . Para cada $\alpha = (z, U) \in \Sigma(M)$ considere uma matriz simétrica e positiva definida 2×2 , $G_\alpha = (g_{ij})$, $g_{ij} \in \mathcal{F}(M)$. Suponhamos que para quaisquer α, β em $\Sigma(M)$, $\alpha = (z, U)$, $\beta = (w, V)$, com $U \cap V \neq \emptyset$, tenhamos o seguinte: se J é a matriz jacobiana de $z \circ w^{-1}$, então $G_\alpha = J^t \cdot G_\beta \cdot J$. Neste caso, dizemos que a família de matrizes G_α é uma *métrica Riemanniana* em M (notação: ds^2 ou \langle, \rangle). Se $p \in U$ e $(\alpha = (x, y), U) \in \Sigma(M)$, definimos o produto interno em T_pM a partir dos

produtos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial x}(p) \right\rangle = g_{11}(p), \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p) \right\rangle = g_{12}(p) \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial y}(p), \frac{\partial}{\partial y}(p) \right\rangle = g_{22}(p).$$

Definição 1.10. Um *caminho* em M é uma curva C^1 por partes $\gamma : I \rightarrow M$. Ele é dito *divergente* se $I = [0, b[$, $0 < b \leq \infty$, e para cada compacto $Q \subset M$ existe $t_0 \in I$ tal que $p(t) \notin Q$, para todo $t \in]t_0, b[$. Usaremos, de um modo abreviado, que $\gamma : p \sim q$ é um caminho em M ligando p a q , isto é, $Dom(\gamma) = [x, y]$ (intervalo fechado), $\gamma(x) = p$ e $\gamma(y) = q$.

Definição 1.11. Uma 2-variedade diferenciável M é *completa* com respeito a uma métrica Riemanniana ds^2 se $\int_0^b |\gamma'(t)| dt = \infty$ para todo caminho divergente $\gamma : [0, b[\rightarrow M$, onde $\|\gamma'(t)\|^2 = ds^2(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$.

2.2 Superfícies de Riemann, Funções e Formas Diferenciáveis

Definição 2.1. Uma *superfície de Riemann* M é uma 2-variedade de classe C^∞ , onde M é conexo e as composições como em (2) na Definição 1.1 são todas holomorfas, com a identificação $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Observação: Mais adiante, o Teorema 6.5 nos garantirá que toda 2-variedade C^∞ conexa orientável admite um sub-sistema de cartas que a torna uma superfície de Riemann.

Exemplo: O toro plano ou toro, exemplo de superfície de Riemann que será manipulado no decorrer do texto, é o quociente do plano complexo por algum reticulado Γ , dado por

$$\Gamma := \{nW_1 + mW_2 | n, m \in \mathbb{Z}\}$$

para $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Considerando $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$ a projeção canônica, podemos induzir uma estrutura complexa em \mathbb{C}/Γ do seguinte modo: seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto aberto tal que quaisquer dois de seus pontos não são equivalentes módulo Γ . Então $U := \pi(V)$ é aberto e $\pi|_V : V \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Sua inversa $\phi : U \rightarrow V$ é uma carta complexa. A coleção de todas essas cartas forma o atlas complexo que cobre \mathbb{C}/Γ e determina, assim, uma estrutura complexa nesta superfície.

Definição 2.2. Seja M uma superfície de Riemann. Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ é *diferenciável* em M se $Re(f \circ z)$ e $Im(f \circ z)$ são C^∞ , para toda carta (z, U) de M . O conjunto de todas as funções diferenciáveis em M será denotado por $\mathcal{E}(M)$.

Definição 2.3. Se M e N são superfícies de Riemann, uma função $f : M \rightarrow N$ é

dita *holomorfa* (ou *anti-holomorfa*) se $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ for holomorfa (ou anti-holomorfa), para toda carta (φ, U) de M e toda carta (ψ, V) de N , com $f(U) \subset V$. O conjunto de todas as funções holomorfas em M para $N = \mathbb{C}$ e $(id, \mathbb{C}) \in \Sigma(N)$ será denotado por $\mathcal{O}(M)$.

Definição 2.4. Nas mesmas notações acima, f é *biholomorfa* se for holomorfa e bi-jetora.

Definição 2.5. Sejam M e N superfícies de Riemann e Y um subconjunto aberto de M . Uma *função meromorfa* em Y é uma função holomorfa $f : Y' \rightarrow \mathbb{C}$, onde $Y' \subset Y$ é um subconjunto aberto, tal que vale o seguinte resultado:

- (i) $Y \setminus Y'$ contém somente pontos isolados.
- (ii) Para todo ponto $p \in Y \setminus Y'$ temos $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = \infty$.

Os pontos de $Y \setminus Y'$ são chamados *pólos* de f . Se $N = \mathbb{C}$ e $(id, \mathbb{C}) \in \Sigma(N)$, vamos denotar por $\mathcal{M}(M)$ o conjunto de todas as funções meromorfas em M , excluindo-se a função constante ∞ .

Definição 2.6. Se V é um espaço vetorial de dimensão n sobre \mathbb{R} , defina em $V \times V$ as operações $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$ e $(\alpha + i\beta) \cdot (u, v) = (\alpha u - \beta v, \alpha v + \beta u)$. Então $(V \times V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} , o *complexificado* de V , que denotaremos por $V^{\mathbb{C}}$. Também podemos denotar $(u, 0) \equiv u$ e $(v, 0) \equiv v$.

Observação: Uma vez que toda $f \in \mathcal{E}(M)$ pode ser escrita como $f = f_1 + if_2$, onde $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(M)$, podemos estender a definição de vetor tangente para $\mathcal{E}(M)$, isto é, $v_p[f] = v_p[f_1] + iv_p[f_2]$, e $v_p : \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ é tal que $v_p[af + bg] = av_p[f] + bv_p[g]$ e $v_p[f \cdot g] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g]$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{C}$ e $f, g \in \mathcal{E}(M)$. Em $(T_p M)^{\mathbb{C}}$ definimos $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$. Deste modo, $f \in \mathcal{O}(M)$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$ em M .

No que segue, estaremos considerando os espaços complexificados.

Definição 2.7. Seja $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$. Um *campo de vetores tangentes* em M é uma aplicação $X : M \rightarrow TM$ onde $X(p) \in T_p M$, para todo p . Um campo X é *diferenciável* se $X[f] \in \mathcal{E}(M)$, para toda $f \in \mathcal{E}(M)$, onde $X[f](p) = (X(p))(f)$, para todo p . Denote por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis de vetores em M .

Definição 2.8. Para um espaço vetorial V , seja V^* seu dual e $(TM)^* = \bigcup_{p \in M} (T_p M)^*$. Uma aplicação $w : M \rightarrow (TM)^*$, onde $w(p) \in (T_p M)^* \forall p$, é dita *1-forma sobre M* . Ela é *diferenciável*, *holomorfa* ou *meromorfa* conforme $w[X] \in \mathcal{E}(M)$, $\mathcal{O}(M)$ ou $\mathcal{M}(M)$, respectivamente, para todo $X \in \mathcal{X}(M)$. Os conjuntos das 1-formas diferenciáveis, das holomorfas e das meromorfas em M serão denotados respectivamente por $\mathcal{E}^{(1)}(M)$, $\Omega(M)$ e $\mathcal{M}^{(1)}(M)$.

Usaremos na próxima definição o seguinte resultado: não existe $f \in \mathcal{M}(M) \setminus \{0\}$ tal que $f = 0$ ou $f = \infty$ num conjunto com pontos de acumulação em M (vide [Foster] - p 7). Deste modo, os zeros e os pólos de uma função meromorfa não-nula são isolados.

Definição 2.9. Seja N superfície de Riemann, $p \in N$ e $\Sigma(N)$. Se $f \in \mathcal{M}(M)$, definimos

$$\text{ord}_p(f) = \begin{cases} k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um zero de ordem } k \in \mathbb{N} \text{ em } z(p), \\ -k, & \text{se } f \circ z^{-1} \text{ tem um polo de ordem } k \in \mathbb{N} \text{ em } z(p), \\ \infty, & \text{se } f \equiv 0 \text{ numa vizinhança de } p. \end{cases}$$

Nesses termos, dizemos que $\text{ord}_p(f)$ é a *ordem* de f em p .

Proposição 2.10. *Seja M uma 2-variedade C^∞ , $p \in U \subset M$, U aberto. Então existem $\varphi \in \mathcal{E}(M)$ e vizinhanças V, W de p tais que $V \subset W \subset U$ e:*

- (1) $0 \leq \varphi(q) \leq 1 \forall q \in M$;
- (2) $\varphi|_V \equiv 1$ e $\varphi|_{M \setminus W} \equiv 0$.

Prova: [Gray] - p 506.

Observação: A proposição acima é um resultado útil em várias circunstâncias, dentre elas na Definição 3.1 de integração de formas. Para isso, devemos comentar o seguinte: para uma carta local $(z = x + iy, U)$, seja $\{dx, dy\}$ a base dual de $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$. Se $X \in \mathcal{X}(M)$, então $X|_U = f \cdot (\frac{\partial}{\partial x}) + g \cdot (\frac{\partial}{\partial y})$. Vejamos que $f, g \in \mathcal{E}(U)$. Pela definição de diferenciabilidade para X , caso $\text{Dom}(x) = M$, podemos fazer $X[x] = f \in C^\infty$. Senão, consideramos $\varphi \cdot x$. Do mesmo modo, se $w \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, então $w|_U = \eta \cdot dx + \xi \cdot dy$, onde $\eta, \xi \in \mathcal{E}(U)$. Em particular, se $w \in \mathcal{M}^{(1)}$, $w[\frac{\partial}{\partial x}] = \eta$ e $w[\frac{\partial}{\partial y}] = \xi$ são holomorfas a menos de alguns pontos isolados, portanto $2 \cdot w|_U = (\eta - i\xi) \cdot dz$, onde $dz = dx + idy$, e neste caso $(\eta - i\xi) \in \mathcal{M}(U)$. Também denota-se $d\bar{z} = \bar{d}z = dx - idy$. Deste modo, caso $(\eta - i\xi)$ tenha um pólo (ou zero) em $p \in M$, dizemos que p é um *pólo* (ou *zero*) de w . A Definição 2.9 estende-se para as 1-formas, e independe da carta (vide [Foster] - pp 57-8).

Definição 2.11. Considere $f \in \mathcal{E}(M)$ e $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$, para cada $(z = x + iy, U) \in M$. Então $df \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$. Se $w \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$, com $w|_U = g \cdot dx + h \cdot dy$, $g, h \in \mathcal{E}(U)$, defina $dw = (h_x - g_y) \cdot dx \wedge dy$, que é uma 2-forma diferenciável em M . Dizemos que w é *fechada* se $dw \equiv 0$ em M .

2.3 Integração de Formas Diferenciáveis

Definição 3.1. Seja M uma superfície de Riemann, $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$. Além disso suponha que uma curva continuamente diferenciável por partes em M é dada. Há uma aplicação

continua

$$c : [0, 1] \rightarrow M$$

para a qual existe uma partição

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

do intervalo $[0, 1]$ e cartas (U_k, z_k) , $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, n$, tal que $c([t_{k-1}, t_k]) \subset U_k$ e as funções

$$x_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_k \circ c : [t_{k-1}, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$$

têm derivadas contínuas de primeira ordem. A integral de ω ao longo da curva c é definida como segue-se. Em U_k podemos escrever ω como $\omega = f_k dx_k + g_k dy_k$, onde as funções f_k , g_k são diferenciáveis. Defina

$$\int_c \omega = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f_k(c(t)) \cdot \frac{dx_k(c(t))}{dt} + g_k(c(t)) \cdot \frac{dy_k(c(t))}{dt} \right) dt.$$

Observação: Esta definição independe das cartas e das partições escolhidas.

Definição 3.2. Dadas duas curvas $\alpha, \beta : I \rightarrow M$, diremos que α e β são *livremente homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : I \times I \rightarrow M$ tal que $H(\cdot, 0) = \alpha$, $H(\cdot, 1) = \beta$ e $H(0, \cdot) = H(1, \cdot)$.

Proposição 3.3. *Seja M uma superfície de Riemann, $w \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ fechada e $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ duas curvas fechadas, C^1 por partes, e livremente homotópicas. Então $\int_\alpha w = \int_\beta w$.*

Prova: [Foster] - pp 66,67.

Observação: A relação de homotopia livre entre curvas é uma relação de equivalência, que iremos denotar por \sim . Vamos indicar por \mathcal{C} o conjunto de todas as curvas em M . A proposição anterior nos garante que a integral sobre um elemento de \mathcal{C}/\sim está bem definida.

Definição 3.4. Considere $w \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ fechada. Para cada $\alpha \in \mathcal{C}/\sim$, o valor complexo $a_\alpha = \int_\alpha w$ é um *período* de w . Dizemos que w *não tem períodos reais* se $Re(a_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}/\sim$. Uma *primitiva* de w é uma função $f \in \mathcal{E}(M)$ tal que $w = df$. Quando existe uma primitiva, dizemos que w é *exata*.

Teorema 3.5. *Seja M superfície de Riemann, $w \in \mathcal{E}^{(1)}(M)$ fechada. Então w tem primitiva se, e somente se, todos os períodos de w são nulos.*

Prova: [Foster] - p 69.

2.4 O Primeiro Grupo Fundamental

Nesta seção, vamos considerar $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Definição 4.1. Seja X um espaço topológico e $p \in X$. Um *laço* em p é uma curva fechada $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = p$.

Definição 4.2. Seja o conjunto $\mathcal{L}(X, p)$ dos laços em $p \in X$. A operação $*$: $\mathcal{L}(X, p) \times \mathcal{L}(X, p) \rightarrow \mathcal{L}(X, p)$ dada por $\alpha * \beta(t) = \alpha(2t)$ se $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ e $\alpha * \beta(t) = \beta(2t - 1)$ se $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, é chamada *produto* de α por β .

Proposição 4.3. A relação de homotopia descrita na Definição 3.2 é uma relação de equivalência entre laços em $p \in X$. Em $\mathcal{L}(X, p) / \sim$ definimos o produto de classes como $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$. Desta forma, o conjunto $\pi_1(X, p) = (\mathcal{L}(X, p) / \sim, *)$ é um grupo, e $\forall p, q \in X$, $\pi_1(X, p) \approx \pi_1(X, q)$, isto é, são isomorfos. Definimos $\pi_1(X)$ como o grupo fundamental de X .

Prova: [Massey] - pp 58-59.

Definição 4.4. X é *simplesmente conexo* se X é conexo e $\pi_1(X)$ é trivial.

Definição 4.5. Sejam X e Y espaços topológicos. Dizemos que $f, g : X \rightarrow Y$ são *homotópicas* se existe uma aplicação contínua $H : I \times X \rightarrow Y$ tal que $H(0, \cdot) = f$ e $H(1, \cdot) = g$. Neste caso denotamos $f \cong g$.

2.5 Gênero de uma Superfície de Riemann Compacta

Definição 5.1. Sejam M, N superfícies de Riemann. Considere dois discos conformes fechados $D_1 \subset M$ e $D_2 \subset N$, $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ um homeomorfismo, $M' = M \setminus \overset{\circ}{D}_1$ e $N' = N \setminus \overset{\circ}{D}_2$. Em $M' \cup N'$ defina a relação de equivalência $x \sim y \iff x = y$, $x = h(y)$ ou $y = h(x)$. A *soma conexa* de M por N é, por definição, o conjunto $M \# N = (M' \cup N') / \sim$. Para um número finito $n \geq 2$ de superfícies de Riemann, $M_1 \# M_2 \# \dots \# M_n = (M_1 \# M_2 \# \dots \# M_{n-1}) \# M_n$.

Proposição 5.2. Toda superfície de Riemann compacta é homeomorfa a uma esfera ou a uma soma conexa de um número finito de toros.

Prova: [Massey] - p 29.

Definição 5.3. Seja M uma superfície de Riemann compacta. O *gênero* de M é o número de toros cuja soma conexa é homeomorfa a M .

Exemplo: O gênero de $\widehat{\mathbb{C}} \approx S^2$ é zero. O símbolo \approx indica um homeomorfismo (ou um isomorfismo, no caso de grupos).

2.6 Espaços de Recobrimento e Recobrimento Holomorfo Ramificado

No que segue, X e Y são espaços topológicos de Hausdorff, conexos por caminhos e *localmente conexos por caminhos*, isto é, dado um ponto p e uma vizinhança $V \ni p$, existe um aberto conexo por caminhos $U \subset V$ tal que $p \in U$.

Definição 6.1. Suponha X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $p : Y \rightarrow X$ é chamada *aplicação de recobrimento* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U tal que sua pré-imagem $p^{-1}(U)$ pode ser representada por

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

onde os V_j , $j \in J$, são subconjuntos abertos e 2 a 2 disjuntos em Y , e todas as aplicações $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ são homeomorfismos.

Proposição 6.2. Toda aplicação de recobrimento $p : Y \rightarrow X$ tem a “propriedade do levantamento de curvas”, isto é, para cada $\alpha : I \rightarrow X$ contínua com $\alpha(0) = x$ e $y \in p^{-1}(x)$, existe uma única $\tilde{\alpha} : I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = y$ e $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

Definição 6.3. Quando $p : Y \rightarrow X$ é um recobrimento, e Y é simplesmente conexo, dizemos que (p, Y) é o *recobrimento universal* de X .

Proposição 6.4. Seja $p : Y \rightarrow X$ um recobrimento. Então $\forall a, b \in X$, $p^{-1}(a)$ e $p^{-1}(b)$ têm a mesma cardinalidade. Deste modo, definimos o número de folhas de p como sendo a cardinalidade de $p^{-1}(x)$, $x \in X$, que denotaremos por $\#p$.

Prova: [Massey] - p 125.

Definição 6.5. Sejam M, N superfícies de Riemann e $f : M \rightarrow N$ holomorfa. Um ponto $p \in M$ é *ponto de ramificação* de f quando não existe vizinhança V de p tal que $f|_V$ seja injetora. O conjunto de todos os pontos de ramificação de f é denotado por $Ram(f)$.

Observação: Se f é não-constante, $Ram(f)$ é um conjunto de pontos isolados.

Definição 6.6. Usando as mesmas notações acima, dizemos que $f : M \rightarrow N$ é um *recobrimento holomorfo ramificado* se f é sobrejetora e $f : M \setminus Ram(f) \rightarrow N \setminus f(Ram(f))$ é

uma aplicação de recobrimento. Também indicaremos por $\#f$ o número de folhas deste recobrimento.

Teorema 6.7. (Fórmula de Riemann-Hurwitz). *Sejam X e Y superfícies de Riemann compactas e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Se b_f é a ordem total dos ramos de f , então:*

$$gen(X) = \frac{b_f}{2} + \#(f)(gen(Y) - 1) + 1.$$

Uma fórmula equivalente á anterior é:

$$\chi(X) = -b_f + \#(f) \cdot \chi(Y).$$

Consideramos agora R uma superfície topológica compacta e $J : R \rightarrow R$ um homeomorfismo, cujo conjunto de pontos fixos é discreto, tal que $J^m = id, m > 1$, e $J^{m-k} \neq id$ para $1 \leq k < m$. Dado $Q \in R$, definimos:

- i) o grupo de isotropia de Q em $\langle J \rangle$ como $\mathcal{F}(Q) = \{A \in \langle J \rangle \mid A(Q) = Q\}$,
- ii) $\mu(Q) = |\mathcal{F}(Q)|$,
- iii) a órbita de Q associada a $\langle J \rangle$ como $orb(Q) = \{Q, J(Q), \dots, J^{m-1}(Q)\}$.

Notamos que $\#(orb(Q)) \cdot \mu(Q) = ord(J)$. Para o recobrimento ramificado $\zeta : R \rightarrow R/\langle J \rangle$ obtemos:

$$\chi(R) = ord(J) \cdot \chi(R/\langle J \rangle) - \sum_{Q \in R} (\mu(Q) - 1).$$

Se $Q \in R$ com $\mu(Q) > 1$, observamos que $orb(Q) = orb(J(Q)) = \dots = orb(J^{m-1}(Q))$. Neste caso existem exatamente s conjuntos disjuntos, com $s \in \mathbb{N}^*$, e cada um possui uma cardinalidade $m_i, i = 1, \dots, s$. Então, podemos reescrever a equação anterior como

$$\chi(R/\langle J \rangle) = \chi(R)/ord(J) + \sum_{i=1}^s (ord(J) - m_i)/ord(J). \quad (2.1)$$

Quando $J^2 = id$, temos $m_i = 1$ e s igual ao número de pontos fixos de R . Dessa forma,

$$\chi(R/\langle J \rangle) = \frac{\chi(R)}{2} + \frac{s}{2}. \quad (2.2)$$

A Equação (2.1) é conhecida como *fórmula de Euler-Poincaré*.

Teorema 6.8. *Sejam X, \tilde{X}, Y e \tilde{Y} variedades diferenciáveis, e $r : \tilde{Y} \rightarrow Y, s : \tilde{X} \rightarrow X$ recobrimentos C^∞ . Se $F : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ é um difeomorfismo C^∞ que preserva fibras, então existe $f : X \rightarrow Y$ difeomorfismo de classe C^∞ tal que $f \circ s = r \circ F$. Reciprocamente, se \tilde{X} e \tilde{Y} são simplesmente conexos e temos $f : X \rightarrow Y$ difeomorfismo de classe C^∞ , então*

existe $F : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ difeomorfismo C^∞ que preserva fibras, com $f \circ s = r \circ F$.

Teorema 6.9. (Princípio do Máximo para Superfícies Mínimas). *Se S_1 e S_2 são duas superfícies mínimas conexas com um ponto p em comum e próximas de p são gráficos de funções f_1 e f_2 com $f_1 \leq f_2$, então $S_1 \equiv S_2$.*

Teorema 6.10. (Teorema do Semi-Espaço). *Uma superfície mínima não planar, propriamente imersa e completa em \mathbb{R}^3 , não está contida em nenhum semi-espaço.*

Teorema 6.11. *A ordem de uma 1-forma meromorfa não-nula w , isto é, seu número de zeros menos o de pólos, sobre uma superfície de Riemann compacta de gênero g , satisfaz*

$$\deg(w) = 2g - 2 = -\chi.$$

Definição 6.12. (As Funções Simétricas Elementares). Suponha X e Y superfícies de Riemann, $\pi : Y \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento holomorfo não ramificado de n -folhas e f uma função meromorfa em Y . Todo ponto $x \in X$ admite uma vizinhança aberta U tal que $\pi^{-1}(U)$ é a união disjunta de conjuntos abertos V_1, \dots, V_n e $\pi : V_v \rightarrow U$ é biolomorfa para $v = 1, \dots, n$. Seja $\tau_v : U \rightarrow V_v$ a aplicação inversa de $\pi|_{V_v} \rightarrow U$ e seja $f_v := \tau_v^* f = f \circ \tau_v$. Suponha T uma indeterminada e considere

$$\prod_{v=1}^n (T - f_v) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n.$$

Então os c_v são funções meromorfas em U e

$$c_v = (-1)^v s_v(f_1, \dots, f_n),$$

onde s_v denota a v -ésima função simétrica elementar em n variáveis. Se levarmos em conta esta mesma construção em uma vizinhança U' de um outro ponto $x' \in X$, então obteremos as mesmas funções c_1, \dots, c_n . Então, estas representam funções meromorfas globais $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{M}(X)$, que chamaremos de funções simétricas elementares de f com respeito ao recobrimento $Y \rightarrow X$.

Teorema 6.13. *Suponhamos que X e Y são superfícies de Riemann e que $\pi : Y \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento ramificado de n -folhas. Se f é uma função meromorfa e c_1, c_2, \dots, c_n são as funções simétricas elementares de f , então*

$$f^n + (\pi^* c_1) f^{n-1} + \dots + (\pi^* c_{n-1}) f + \pi^* c_n = 0.$$

Teorema 6.14. *Suponhamos que X é uma superfície de Riemann e*

$$P(T) = T^n + c_1 T^{n-1} + \dots + c_n \in \mathcal{M}(X)[T]$$

é um polinômio irredutível de grau n . Então existe uma superfície de Riemann Y , um recobrimento ramificado de n folhas $\pi : Y \rightarrow X$ e uma função meromorfa $F \in \mathcal{M}(Y)$ tal que $(\pi^*P)(F) = 0$. Nestas mesmas condições a tripla (Y, π, F) é univocamente determinada: se (Z, τ, G) têm as mesmas propriedades, então existe exatamente uma aplicação biholomorfa que preserva fibras $\sigma : Z \rightarrow Y$ tal que $G = \sigma^*F$.

2.7 Superfícies Mínimas, Parâmetros Isotérmicos e Funções Harmônicas

Definição 7.1. Uma *superfície* em \mathbb{R}^n é um par (M, X) onde M é uma 2-variedade diferenciável e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão C^∞ , isto é, $X \circ \varphi^{-1} \in C^\infty$ e $d(X \circ \varphi^{-1})$ é injetiva para toda $(\varphi, U) \in \sum(M)$. Como é mostrado abaixo, X induz uma métrica Riemanniana em M . Dizemos que uma superfície $S = (M, X)$ é *completa* se M for completa, relativamente á métrica Riemanniana induzida por X sobre M .

Observação: Se $p \in U$ e $d(X \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é injetiva para alguma carta (φ, U) de M , então $d(X \circ \psi^{-1})(\psi(p))$ é também injetiva, onde $(\psi, V) \in \sum(M)$ e $p \in V$.

Considere u, v os parâmetros em $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^2$. De modo abreviado temos $d(X \circ \varphi^{-1}) = [X_u \ X_v]$. Portanto, $G = [X_u \ X_v]^t \cdot [X_u \ X_v]$ é uma matriz 2×2 simétrica, e $\det G \neq 0$. Neste caso, se $G = (g_{ij})$, defina $H = (g_{22}X_{uu} - 2g_{12}X_{uv} + g_{11}X_{vv}) / (2 \cdot \det G)$. Vemos por [Osserman]- pp 11-3 que H não depende de $(\varphi, U) \in \sum(M)$.

Definição 7.2. O vetor $H = H(p)$ acima descrito é *vetor curvatura média* de S em p . A superfície S é *mínima* se $H = 0$ para todo ponto de S . Também, dizemos que $X : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *imersão mínima*.

Definição 7.3. Os parâmetros u, v são *isotérmicos* se $g_{11} \equiv g_{22}$ e $g_{12} \equiv 0$ em $\varphi(U)$.

Lema 7.4. Seja $S = (M, X)$ uma superfície mínima. Então, para todo $p \in S$, existe uma carta (φ, U) de M com $p \in \varphi(U)$ tal que os parâmetros em U são isotérmicos.

Prova: [Osserman] - p 31.

Observação: Agora nós daremos um resultado mais forte, cuja prova não é tão elementar quanto a deste último. No entanto, ele nos permite concluir que toda 2-variedade C^∞ conexa M possui uma coleção de cartas $\sum' \subset \sum(M)$ tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos, para toda $(\varphi, U) \in \sum'$, e a família \sum' verifica os itens (1) e (2) da Definição 1.1.

Teorema 7.5. Dada uma 2-variedade M de classe C^∞ , para todo $p \in M$ existe uma

carta (φ, U) de M , com $p \in U$, tal que os parâmetros em $\varphi(U)$ são isotérmicos.

Prova: [Hicks] - p 139.

Considere uma superfície $S = ((M, \sum(M)), X)$. Se excluirmos todas as cartas de $\sum(M)$ nas quais os parâmetros não são isotérmicos, obteremos uma nova superfície $S' = ((M, \sum'), X)$, onde as composições como em (2) na Definição 1.1 são aplicações conformes ou anti-conformes (veja [Osserman]- p 33). Nesta nova superfície, se existir um subconjunto \sum'' de \sum' tal que (1) se verifica para \sum'' , e em (2) as composições são todas conformes, dizemos que S é *orientável*, e \sum'' é uma *estrutura conforme* de M . Caso contrário, S é dita *não-orientável*.

Definição 7.6. Sejam u e v os parâmetros em \mathbb{R}^2 , e U um subconjunto aberto do \mathbb{R}^2 . O *operador de Laplace* é a aplicação $\Delta : \mathcal{F}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$.

Definição 7.7. Seja M uma 2-variedade C^∞ com estrutura conforme \sum . Uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *harmônica* se $\Delta(f \circ \varphi^{-1}) \equiv 0$ em $\varphi(U)$, para toda carta $(\varphi, U) \in \sum$.

Lema 7.8. *Considere uma superfície $S = (M, X)$ em \mathbb{R}^n , $X = (x_1, \dots, x_n)$ e M com uma estrutura conforme \sum . Então S é mínima se, e somente se, x_k é harmônica para todo k .*

Prova: Seja $(\varphi, U) \in \sum$, e como X é imersão C^∞ , $x_k \circ \varphi^{-1}$ é $C^\infty \forall k$. Se u e v são parâmetros de \mathbb{R}^2 , estes são isotérmicos pois \sum é conforme. Considere $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ o operador de Laplace, e denote

$$\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = (\Delta(x_1 \circ \varphi^{-1}), \Delta(x_2 \circ \varphi^{-1}), \dots, \Delta(x_n \circ \varphi^{-1})).$$

Usando as mesmas notações da Definição 6.3, seja $\lambda^2 = g_{11} = g_{22}$. Por [Osserman]- pp 27-8, temos $\Delta(X \circ \varphi^{-1}) = 2\lambda^2 H$ c.q.d.

Teorema 7.9. (Princípio do Máximo para Funções Harmônicas). *Seja G um aberto conexo de \mathbb{C} , $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Se existe $a \in G$ tal que $u(a) \geq u(z)$, para todo $z \in G$, então $u \equiv u(a)$ em G .*

Prova:[Conway] - p 255.

Proposição 7.10. *Uma superfície mínima não pode ser compacta, isto é, se $S = (M, X)$ é mínima, então M não é compacto.*

Prova: Senão, as funções x_k atingiriam um máximo, portanto seriam constantes, mas X é uma imersão. Quer dizer, se $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e M é compacto e conexo, seja m o valor máximo de u . Os conjuntos $A = \{p \in M : u(p) = m\}$ e $B = \{p \in M : u(p) \neq m\}$

são ambos abertos e disjuntos, e $M = A \cup B$ (união disjunta). Então $B = \emptyset$ c.q.d.

Teorema 7.11. (Huber-Osserman). *Seja $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ uma imersão isométrica completa de uma superfície de Riemann R sobre um espaço \mathbb{E} “flat”, completo e tridimensional. Se X é mínima e a curvatura Gaussiana total $\int_R K dA$ é finita, então R é biholomorfa a uma superfície de Riemann compacta \bar{R} perfurada em um número finito de pontos $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$.*

Teorema 7.12. (Representação de Weierstrass). *Seja R uma superfície de Riemann, g e dh função e 1-forma meromorfas em R , tais que os zeros de dh coincidam com os pólos e zeros de g . Suponhamos que $X : R \rightarrow \mathbb{E}$, dada por*

$$X(p) := \operatorname{Re} \int^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3), \quad \text{onde } (\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \frac{1}{2}(1/g - g, i/g + ig, 2)dh,$$

está bem definida. Então X é uma imersão mínima conforme. Reciprocamente, toda imersão mínima conforme $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ pode ser expressa como acima para alguma função g e 1-forma dh meromorfas.

Definição 7.13. O par (g, dh) são os dados de Weierstrass e $\phi_{1,2,3}$ as formas de Weierstrass em R da imersão mínima $X : R \rightarrow X(R) \subset \mathbb{E}$.

Teorema 7.14. *Nas hipóteses dos Teoremas 6.11 e 6.12, os dados de Weierstrass (g, dh) se estendem meromorficamente sobre \bar{R} .*

Definição 7.15. Um fim de R é a imagem de uma vizinhança perfurada V_p de um ponto $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ tal que $(\{p_1, p_2, \dots, p_s\} \setminus \{p\}) \cap \bar{V}_p = \emptyset$. O fim é mergulhado se sua imagem é mergulhada para uma vizinhança suficientemente pequena de p .

Teorema 7.16. (Fórmula de Jorge-Meeks). *Seja $X : R \rightarrow \mathbb{E}$ uma superfície mínima regular completa de curvatura total finita $\int_S K dA$. Se os fins de R são mergulhados, então*

$$\deg(g) = k + s - 1,$$

onde k é o gênero de $\bar{R} = R \setminus \{p_1, \dots, p_s\}$ e s é o seu número de fins.

Observação: A função g é a projeção estereográfica da aplicação de Gauss $N : R \rightarrow S^2$ da imersão mínima X , ou seja,

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1} (2\Re\{g\}, 2\Im\{g\}, |g|^2 - 1).$$

Ela é um recobrimento ramificado de $\widehat{\mathbb{C}}$ e $\int_S K dA = -4\pi \deg(g)$.

O elemento (de reta) ds de $X : R \rightarrow \mathcal{E}$ pode ser escrito como

$$ds = \frac{1}{2}(|g| + 1/|g|)|dh|,$$

e a curvatura de Gauss é dada por

$$K = -\frac{16|dg/dh|^2}{|g|^2(|g| + 1/|g|)^4},$$

Teorema 7.17. *Se γ é uma curva em $X(R)$ então vale:*

- i) γ é assintótica se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) \cdot dh(\dot{\gamma}) \in i\mathbb{R}$;*
- ii) γ é principal se, e somente se, $\frac{dg}{g}(\dot{\gamma}) \cdot dh(\dot{\gamma}) \in \mathbb{R}$.*

Observação: Se uma curva é invariante por isometria numa superfície, então esta curva é uma geodésica. Agora, suponha que numa imersão mínima $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Omega \subset \mathbb{C}$, com dados de Weierstraß (g, dh) tenhamos uma curva $\alpha : I \rightarrow \Omega$ com $g \circ \alpha$ meridiano ou equador de $\widehat{\mathbb{C}}$, e $dh \circ \alpha$ meridiano principal. Pelo Princípio de Reflexão de Schwarz em \mathbb{C} , temos que $\{\alpha\} = \alpha(I)$ é arco de circunferência, ou segmento de reta. Assim, reflexão por $\{\alpha\}$ mantém invariante a *Primeira Forma Fundamental*, donde é isometria de $S = F(\Omega)$, e portanto α é geodésica. Além disso,

$$\frac{dg}{g} \cdot dh \in \begin{cases} i\mathbb{R}, \\ \mathbb{R}. \end{cases}$$

Finalmente, por um resultado clássico da Teoria de Superfícies Mínimas (vide [Ka]), segue-se que:

- (a) Nas condições do Teorema 7.17(i), temos α geodésica $\iff \alpha$ é reta;
- (b) Nas condições do Teorema 7.17(ii), temos α geodésica $\iff \alpha$ é plana.

O Teorema 7.17 não exige que α seja geodésica.

Teorema 7.18. (Princípio da Reflexão de Schwarz). *Toda linha reta (respectivamente, geodésica plana) numa superfície mínima é uma linha de simetria rotacional (respectivamente, simetria especular) da superfície.*

2.8 Homologia Singular

Definição 8.1. Dado $\{x_0, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ seja σ^k o menor convexo que contém $\{x_0, \dots, x_k\}$. Se $\{x_1 - x_0, \dots, x_k - x_0\}$ for linearmente independente, dizemos que σ^k é um *k-simplexo*.

Proposição 8.2. *O k-simplexo descrito acima é tal que $\sigma^k = \{t_0 \cdot x_0 + t_1 \cdot x_1 + \dots + t_k \cdot x_k : t_i \in \mathbb{R}, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^k t_i = 1\}$.*

Prova: [Vick] - p 2.

Definição 8.3. Considere $(G_i)_{i \in I}$ uma família de grupos. A *soma direta* desta família é o grupo $\oplus_i G_i$, onde cada elemento é representado como uma soma formal $\sum_{i \in I} a_i$, onde $a_i \neq 0$ apenas para um número finito de índices. Esta soma é uma operação comutativa, e distinta da operação em G_i , para todo i .

Definição 8.4. Um *p-simplexo singular* em X é uma aplicação contínua $\phi : \sigma^p \rightarrow X$. Denotamos $S_p(X)$ o *grupo abeliano livre* nos p -simplexos singulares de X como a soma direta de Z 's (uma cópia para cada ϕ). Um elemento típico de $S_p(X)$ é chamado *p-cadeia* em X e se escreve de forma única como uma soma finita $\sum n_i \phi_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\phi_i : \sigma^p \rightarrow X$ contínua.

O seguinte resultado é um fato conhecido de Topologia Geral, e mostra que a definição acima independe de σ^p fixado.

Proposição 8.5. Se $K, Q \subset \mathbb{R}^n$ são compactos, convexos e com interior não-vazio, então existe um homeomorfismo $h : K \rightarrow Q$ tal que $h|_{\partial K}$ é um homeomorfismo entre ∂K e ∂Q .

Prova: [Lima] - p 334.

Definição 8.8. Sejam $Z_p(X) = \text{Ker}\{\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)\}$ e $B_p(X) = \text{Im}\{\partial_p : S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)\}$, que são subgrupos do grupo abeliano S_p . Da proposição anterior temos $B_p(X) \subset Z_p(X)$. O *p-ésimo* grupo de homologia é o grupo quociente $H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X)$.

Proposição 8.9. Se $X \cong Y$, então $H_p(X) \approx H_p(Y)$ para todo p .

Prova: [Vick] - p 18.

2.9 Feixes, Gérmenes de Funções e Continuação Analítica

Esta seção apresenta conceitos e resultados que formalizam os Teoremas 6.13 e 6.14, mas foge ao escopo da dissertação.

Definição 9.1. Seja X um espaço topológico e $\tau = \{U \subset X : U \text{ aberto de } X\}$ sua topologia. Um *pré-feixe* de grupos abelianos em X é um par (F, ρ) tal que:

- i) $F = (F(U))_{U \in \tau}$ é uma família de grupos abelianos;
- ii) $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \tau, V \subset U}$, é uma família de homomorfismos de grupos, $\rho_V^U : F(U) \rightarrow F(V)$,

com as propriedades $\rho_U^U = id_{F(U)}$, $\forall U \in \tau$ e $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$, $W \subset V \subset U$.

Do mesmo modo definimos pré-feixes de anéis, espaços vetoriais, etc. Para $f \in F(U)$, vamos escrever de modo abreviado $f|_V = \rho_V^U(f)$.

Definição 9.2. Um pré-feixe $F = (F, \rho)$ em um espaço topológico X é um *feixe* quando para cada $U \in \tau$, e cada família de abertos $U_i \subset U$, $i \in I$, com $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, verificam-se os seguintes axiomas:

- i) $f, g \in F(U)$, $f|_{U_i} = g|_{U_i} \forall i \in I \Rightarrow f = g$;
- ii) $f_i \in F(U_i)$, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, $\forall i, j \in I \Rightarrow \exists f \in F(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, $\forall i \in I$.

Exemplos: Se M é uma superfície de Riemann e τ é sua topologia, considere $\mathcal{E} = (\mathcal{E}(U))_{U \in \tau}$ e $\rho_V^U(F) = f|_V$ (restrição natural). Então \mathcal{E} é um feixe de espaços vetoriais em M . Do mesmo modo, temos que $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, \mathcal{O} , Ω e \mathcal{M} , junto com os homeomorfismos $\rho_V^U(f) = f|_V$ (restrição natural), são feixes de espaços vetoriais em M .

Observação: O elemento f do axioma (ii) será denominado uma *globalização* de $(f_i)_{i \in I}$.

Definição 9.3. Seja F um feixe sobre um espaço topológico X e $a \in X$. Vamos representar a união disjunta de conjuntos por $\dot{\cup}$. Então seja $F_a^* = \dot{\cup}_{a \in U} F(U)$ e uma relação de equivalência \sim_a em F_a^* dada por:

$$f \in F(U) \text{ e } g \in F(V), f \sim_a g \Leftrightarrow \exists W \subset U \cap V, W \neq \emptyset, \text{ tal que } \rho_W^U(f) = \rho_W^V(g).$$

Seja $F_a = F_a^* / \sim_a$. Um elemento de F_a é dito *gérmen de função em $a \in X$* e é representado, por exemplo, por $[f]_a$. Quando X é superfície de Riemann, para $F = \mathcal{O}$ dizemos gérmen de função holomorfa, para $F = \mathcal{M}$, gérmen de função meromorfa, etc.

Proposição 9.4. *Seja F um feixe sobre o espaço topológico X . Seja $|f| = \dot{\cup}_{x \in X} F_x$ e $\prod : |f| \rightarrow X$ definida por $\prod([f]_x) = x$. Então $|f|$ admite uma topologia que torna \prod um homeomorfismo local. Se $F = \mathcal{O}$, $|f|$ é um espaço de Hausdorff, localmente conexo por caminhos.*

Prova: [Foster] - pp 39-0.

Observação: O conjunto de todos os elementos da forma $[U, f] = \{[f]_x : x \in U\}$, onde $U \in \tau$ e $f \in F(U)$, é uma base da topologia de $|F|$.

Definição 9.5. Denote por $|\mathcal{O}([f])|$ a componente conexa de $|\mathcal{O}|$ que contém $[f]_a$. Temos $[g]_b \in |\mathcal{O}([f]_a)|$ se, e somente se, existe uma curva $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow |\mathcal{O}([f]_a)|$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = [f]_a$ e $\tilde{\alpha}(1) = [g]_b$. Neste caso, dizemos que $[g]_b$ é uma *continuação analítica* de $[f]_a$ ao longo de $\tilde{\alpha}$.

Capítulo 3

A Função Elítica Z

3.1 O comportamento geométrico de Z

Seja $\{w_1, w_2\}$ uma base de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Considere a seguinte figura, que representa uma célula fundamental de reticulado $\Gamma = \{(2n+1)w_1 + (2m+1)w_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ em \mathbb{C} . Assim definimos o toro $T = \mathbb{C}/\Gamma$, cujos elementos são classes de equivalência $[z]$, com $z \in \mathbb{C}$. Note que $z \sim \zeta \iff z - \zeta = n \cdot W_1 + m \cdot W_2$, para certos $n, m \in \mathbb{Z}$.

Observação: Usamos sempre $2w_1\mathbb{Z} + 2w_2\mathbb{Z}$ na definição das classes de equivalência. Com isso, os reticulados $w + \Gamma, \forall w \in \mathbb{Z}$, são todos distintos, mas definem exatamente o *mesmo* toro.

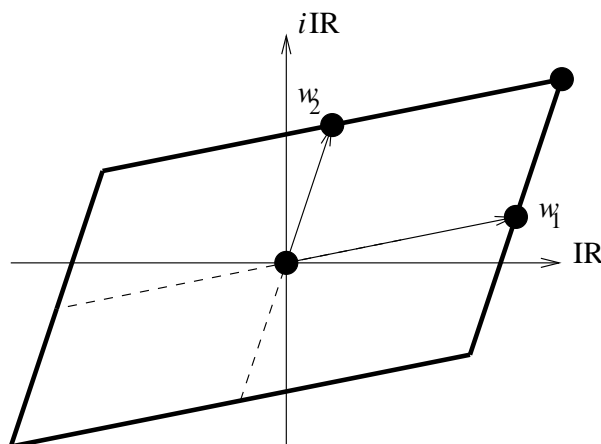


Figura 3.1: Célula fundamental de toro.

O paralelogramo formado por $\{w_1, w_2\}$ determina o tipo de toro T . Caso $w_1 \perp w_2$, dizemos que T é *retangular*. Caso $|w_1| = |w_2|$, dizemos que T é *rômbico*. O toro *quadrado*

é simultaneamente rômbo e retangular. É claro que, num toro retangular, existem involuções anti-holomorfas cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente duas componentes.

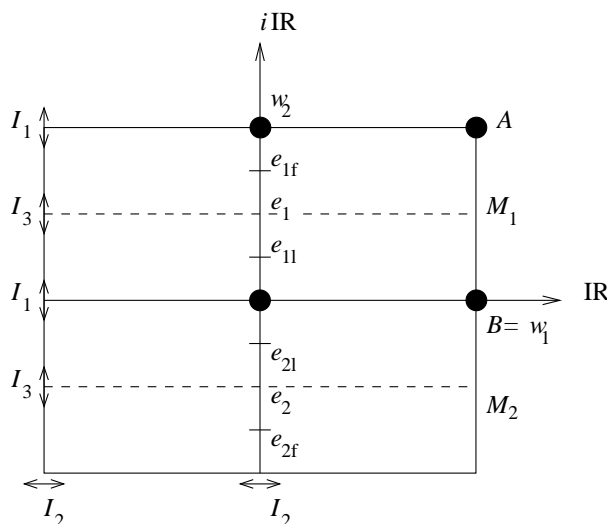


Figura 3.2: Célula fundamental de toro retangular com algumas involuções e pontos indicados.

Algumas involuções adicionais na Figura 3.2

$$I_1 : z \rightarrow \bar{z};$$

$$I_2 : z \rightarrow -\bar{z};$$

$$I_3 : z \rightarrow \bar{z} + w_2.$$

Num rômbo, há involuções anti-holomorfas cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente uma componente. O fato é que valem as recíprocas, como argumentamos a seguir.

Suponha que, dado um toro T , ele apresente uma involução anti-holomorfa J cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente duas componentes. Esta induz uma involução anti-holomorfa em \mathbb{C} que preserva as classes de equivalência do toro. Em \mathbb{C} , esta involução é um anti-biholomorfismo, e portanto da forma $z \mapsto a\bar{z} + b$, onde a, b são constantes complexas com $a \neq 0$. Da observação acima, sem perda de generalidade temos $J([0]) = [0]$, e podemos considerar $b = 0$. Agora, uma vez que as classes de equivalência são preservadas, temos $|a| = 1$. De fato, pois temos uma involução. Assim, $z \mapsto a\bar{z}$ tem como conjunto de pontos fixos a reta de \mathbb{R}^2 dada por $r : (1 - a_1)x = a_2y$, que equivale à reta $r : (1 + a_1)y = a_2x$, onde $a_1 + ia_2 = a$.

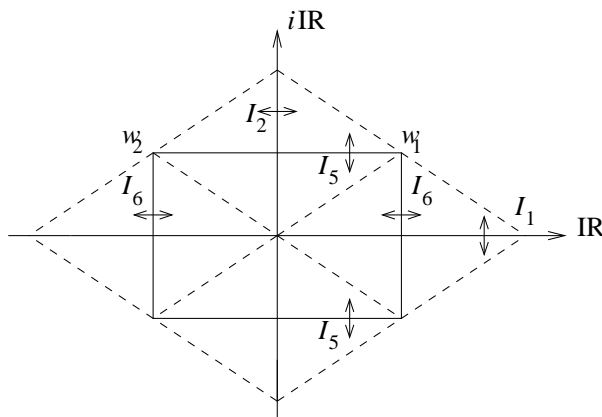


Figura 3.3: Célula fundamental de toro rômboide com algumas involuções indicadas.

Agora temos o seguinte: ao fazermos reflexão de Γ por r , para que a imagem coincida com a rotação de Γ pelo número complexo unitário a , é preciso que a célula fundamental seja um *retângulo*. De fato, se r intersecta dois lados da célula de Γ , não passando por nenhum vértice, então deve fazê-lo ortogonalmente, e pelos pontos médios, o que resulta num retângulo.

Sem perda de generalidade, Γ é invariante pela aplicação antípoda. Então, se r é diagonal à célula, esta deve ser um losango. Além disso, temos $aw_1 = w_2$ e $aw_2 = -w_1$, o que implica $a^2 = -1$. Ou seja, a rotação é de 90° , donde $w_1 \perp w_2$. Neste caso, a célula é um quadrado, mas isso contradiz a hipótese de duas componentes.

Portanto, T é um toro retangular. Argumentos análogos mostram que, se o toro apresenta uma involução anti-holomorfa cujo conjunto de pontos fixos tem exatamente uma componente, então ele é rômboide.

Voltando à Figura 3.1, a rotação de 180° graus em torno da origem, dada por $z \mapsto -z$, corresponde a uma involução I em T . Esta involução possui exatamente quatro pontos fixos, 0 , w_1 , w_2 e $w_1 + w_2$ indicados na Figura 3.1. Considerando uma triangularização de T , sua característica de Euler é dada por $\chi(T) = \mathcal{V} - \mathcal{A} + \mathcal{F} = 0$. Podemos supor que os pontos 0 , w_1 , w_2 e $w_1 + w_2$ da Figura 3.1 recaem exatamente nos vértices desta triangularização, e que esta é invariante por I .

Ao efetuarmos o quociente de T pela involução I , obteremos uma nova superfície triangularizada, mas com número de arestas $\mathcal{A}/2$, de faces $\mathcal{F}/2$. Quanto aos vértices, *exceto* por aqueles fixados, seu número também é reduzido pela metade. Então, vale a seguinte igualdade:

$$\chi(T/I) = \frac{(\mathcal{V} - 4) - \mathcal{A} + \mathcal{F}}{2} + 4 = 0 - 2 + 4 = 2. \quad (3.1)$$

Logo, o gênero de T/I é zero. Pelo *Teorema de Classificação das Superfícies Compactas* (vide [Massey, p 9]), esta é homeomorfa a uma esfera. Logo, T/I é simplesmente conexa. Agora, a estrutura conforme de \mathbb{C} é induzida em T/I , mesmo considerando que a função quociente é um *recobrimento ramificado*. De fato, para recobrimentos, as induções de estrutura são imediatas. No caso ramificado, vide [Forster, p 51]. Assim, T/I é uma superfície de Riemann compacta, simplesmente conexa.

Vamos agora enunciar o seguinte resultado, que é uma extensão do *Teorema da Aplicação de Riemann*:

Teorema 1. (Koebe). Seja S uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então existe um biholomorfismo $f : S \rightarrow X$, em que X é uma das seguintes superfícies: a) o disco unitário, b) o plano complexo \mathbb{C} , c) a esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Prova: [Ahlfors], capítulo 2.

Devido ao Teorema de Koebe, existe um biholomorfismo $\mathcal{B} : T/I \rightarrow \mathbb{C}$. Agora, sabemos que *todo* biholomorfismo de $\hat{\mathbb{C}}$ em $\hat{\mathbb{C}}$ é dado por uma transformação de Möbius, e toda transformação de Möbius é determinada por três pontos de domínio e três de imagem.

Posteriormente, trabalharemos apenas com o toro retangular. Assim, vamos deduzir o comportamento de uma função $Z := \mathcal{B} \circ (\cdot/I)$ para este tipo de toro. Considerando a Figura 3.2, escolhemos os valores ∞ , 0 e -1 como imagens de Z aplicada aos pontos A , B e M_1 , respectivamente.

Uma vez que I_2 é uma involução anti-holomorfa em T , cujo conjunto de pontos fixos têm duas componentes, ela induz uma involução anti-holomorfa em $\hat{\mathbb{C}}$. Portanto, em $\hat{\mathbb{C}}$ temos a conjugada de uma transformação de Möbius que fixa 0 , ∞ e -1 . Ou seja, fixa o equador $\hat{\mathbb{R}}$. Então, a involução induzida é $z \mapsto \bar{z}$. Desta forma, o segmento vertical da Figura 3.2 que passa por A e B são levados por Z num subconjunto de $\hat{\mathbb{R}} \subset \hat{\mathbb{C}}$.

Agora, o segmento vertical da Figura 3.2 que passa pela origem também é levado num subconjunto de $\hat{\mathbb{R}}$, pois a involução é a *mesma*. Assim, nos pontos marcados com \bullet temos que Z assume valores reais. Defina $\lambda := Z([0])$. Já sabemos que $Z(A) = \infty$ e $Z(B) = 0$. Mas como Z tem ordem 2 nestes pontos, então ela dobra ângulos. Em particular, o segmento passa por A e B com ângulos rasos, mas sua imagem em $\hat{\mathbb{C}}$ faz 360° ao passar por 0 ou ∞ , de modo que os valores deste segmento pela Z ficam confinados no segmento real $[-\infty, 0]$. Agora, *somente* pontos do segmento vertical sobre A e B é que são levados em $[-\infty, 0]$, pois Z tem grau 2. Ou seja, $0 < \lambda < \infty$.

Olhando para a involução I_3 , vemos que ela induz a conjugada de uma Möbius em $\hat{\mathbb{C}}$ que intercambia 0 com ∞ , e fixa -1 . Ou seja, $z \mapsto 1/\bar{z}$. Em particular, $Z(e_1)$ é real e

unitário, mas não se encontra em $[-\infty, 0]$. Assim, $Z(e_1) = 1$, e como Z corresponde à involução $z \mapsto -z$ em \mathbb{C} , então $Z(M_2) = -1$ e $Z(e_2) = 1$.

Como Z é contínua, então leva conexos em conexos. Assim, $0 < \lambda < 1$. Devido a I_3 , concluímos que a imagem de Z pelo quarto ponto de ramo \bullet na Figura 3.2 é levado em $1/\lambda$. Introduzimos agora o parâmetro $x = Z(e_{1l}) = Z(e_{2l})$, que será utilizado mais adiante, onde $\lambda < x < 1$. Conseqüentemente, $Z(e_{1f}) = Z(e_{2f}) = 1/x$.

3.2 A equação algébrica do toro em termos de Z

De acordo com o Teorema 5.13 do Capítulo 2, tomando $X = \hat{\mathbb{C}}$, $Y = T$, e $\pi = Z$, é possível obtermos uma equação algébrica. De acordo com o Teorema 5.14 do Capítulo 2, esta descreve $Y = T$. Observe agora a seguinte figura onde, como usualmente, escrevermos os valores-imagem em pontos do domínio.

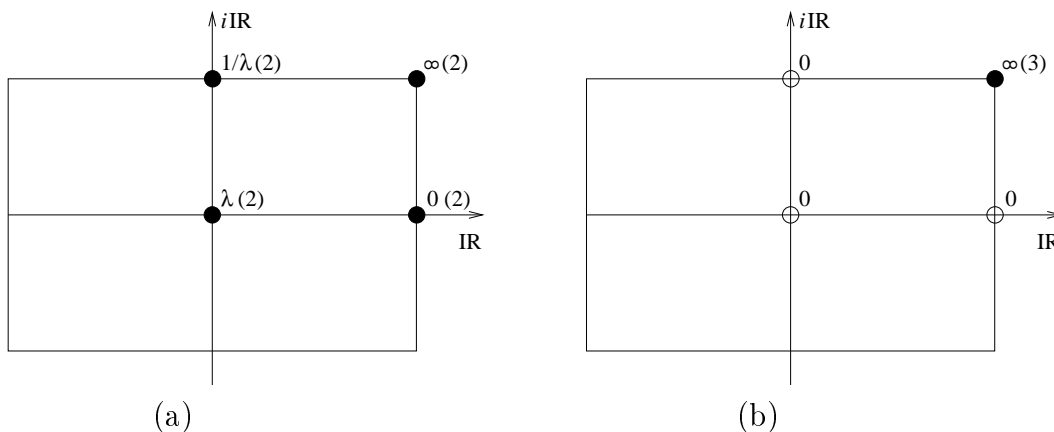


Figura 3.4: (a) valores de Z ; (b) valores de Z' .

Na Figura 3.4(b), marcamos apenas os pólos e zeros de Z' . Note que ela possui um único pólo (de ordem 3), e seus zeros são todos simples. Agora, observe que a função $Z(Z - \lambda)(Z - 1/\lambda)$ tem exatamente os mesmos pólos e zeros que Z'^2 . Considerando seus desenvolvimentos de Laurent em cada ponto de T , vemos que $Z(Z - \lambda)(Z - 1/\lambda)/Z'^2$ é holomorfa em T , ou seja, não assume pólos. De fato, em $w_1 + w_2$ temos

$$\begin{aligned} \frac{Z(Z - \lambda)(Z - 1/\lambda)}{Z'^2} \Big|_{z=0} &= \frac{a_{-6}z^{-6} + \dots + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1 + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots}{b_{-6}z^{-6} + \dots + b_{-1}z^{-1} + b_0 + b_1z^1 + b_2z^2 + \dots + b_nz^n + \dots} \\ &= \frac{a_{-6} + \dots + a_{-1}z^5 + a_0z^6 + a_1z^7 + a_2z^8 + \dots + a_nz^{n+6} + \dots}{b_{-6} + \dots + b_{-1}z^5 + b_0z^6 + b_1z^7 + b_2z^8 + \dots + b_nz^{n+6} + \dots}. \end{aligned}$$

Além disso, também não assume zeros. Se esta função não for constante, a Análise Complexa garante que é aberta, mas como T é compacto, então temos sobrejetividade no

contra-domínio $\hat{\mathbb{C}}$. Isso seria absurdo, pois acabamos de ver que sua imagem é subconjunto de \mathbb{C}^* .

Assim, existe uma constante complexa não-nula c tal que

$$Z'^2 = cZ(Z - \lambda)(Z - 1/\lambda). \quad (3.2)$$

Considere a curva $\alpha(t) = t$, $0 < t < w_1 \in \mathbb{R}_+^*$, onde w_1 é o gerador real do reticulado. Isto é, $Z(w_1) = 0$, enquanto que $Z(0) = \lambda$. Já vimos que $Z([0, w_1]) = [0, \lambda]$. Então temos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \ni \left\{ \frac{d}{dt}[Z(\alpha(t))] \right\}^2 &= \{Z'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\}^2 \\ &= Z'^2(\alpha(t)) \cdot 1 \stackrel{(3.2)}{=} c \cdot \underbrace{Z}_{pos} \underbrace{(Z - \lambda)}_{neg} \underbrace{(Z - 1/\lambda)}_{neg}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De (3.3), temos que c é real positiva. Agora tomemos $\beta(t) = it$, $0 < t < |w_2|$, onde w_2 é o gerador imaginário puro do reticulado. Isto é, $Z(w_2) = 1/\lambda$, enquanto que $Z(w_2/2) = 1$ e $Z(0) = \lambda$. Sabemos também que $Z([0, w_2]) = [\lambda, 1/\lambda]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \ni \left\{ \frac{d}{dt}[Z(\beta(t))] \right\}^2 &= \{Z'(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\}^2 \\ &\stackrel{t=1/2}{=} Z'^2(w_2/2) \cdot (-1) = c \cdot 1 \cdot (1 - \lambda)(1 - 1/\lambda). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que $Z'(w_2/2)$ depende somente de $|w_2|$, e não de w_1/w_2 . De fato, a Figura 3.5 mostra dois toros em que w_1/w_2 é o mesmo, assim como a imagem $Z([0, w_2]) = [\lambda, 1/\lambda]$. Porém, o intervalo $[\lambda, 1/\lambda]$ é percorrido com velocidades diferentes.

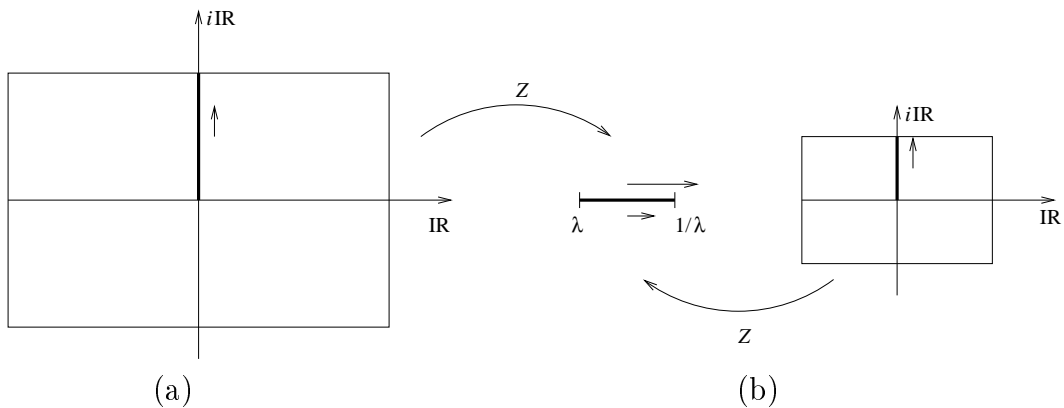


Figura 3.5: Intervalo $[\lambda, 1/\lambda]$ percorrido com velocidades distintas.

Ou seja, mantendo w_1/w_2 , podemos escolher w_2 de modo que

$$Z'(w_2/2) = \sqrt{(1-\lambda)(1/\lambda-1)} > 0 \quad (3.5)$$

Agora, pelas equações (3.4) e (3.5) temos que

$$(1-\lambda)(1/\lambda-1)(-1) = c \cdot (1-\lambda)(1-1/\lambda),$$

o que implica $c = 1$.

Capítulo 4

A Superfície de Costa

Teorema (A Superfície de Costa). Seja \bar{R} o toro quadrado cuja equação algébrica é

$$\wp'^2 = \wp(1 - \wp)(1 + \wp).$$

Para algum μ positivo, defina $g = \mu\wp'$ e $dh = \wp d\wp/\wp'$. Então existe um único valor positivo de μ tal que (g, dh) são os dados de Weierstrass em $R = \bar{R} \setminus \wp^{-1}(\{-1, 1, \infty\})$ de um mergulho mínimo completo de R em \mathbb{R}^3 .

A próxima figura representa a imagem do mergulho mínimo referido pelo teorema acima.

Após um movimento rígido conveniente em \mathbb{R}^3 podemos posicionar a superfície Costa de tal maneira a ter as seguintes simetrias:

$$\sigma_1 := (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, x_2, x_3);$$

$$\sigma_2 := (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, -x_2, x_3);$$

$$\sigma_3 := (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_2, x_1, -x_3) \quad \text{e}$$

$$\sigma_4 := (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_2, -x_1, -x_3).$$

Note que $\sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_1 \circ \sigma_3$ e $\sigma_4 = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1$. Chamaremos de G o grupo de simetrias da superfície Costa. Neste caso,

$$G = \langle \sigma_1, \sigma_3 \rangle.$$

Lembremos que a superfície Costa é invariante por rotação de 180° ao redor do eixo- x_3 . Esta rotação será dada por $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

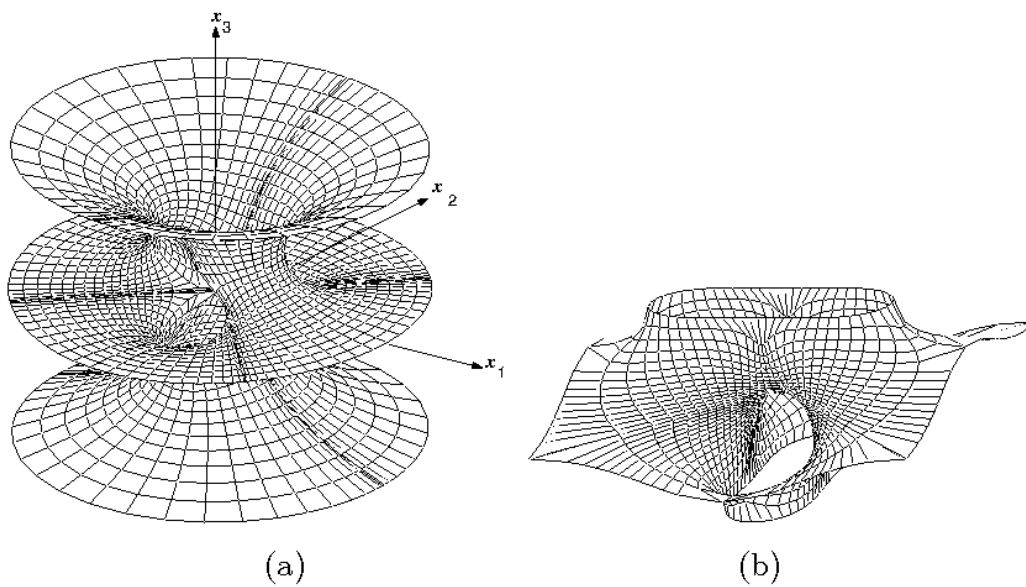


Figura 4.1: (a) A superfície Costa; (b) a peça fundamental P da superfície Costa triplamente periódica.

Capítulo 5

As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas

5.1 O teorema principal

Considere a superfície representada pela Figura 5.1, que chamaremos de S .

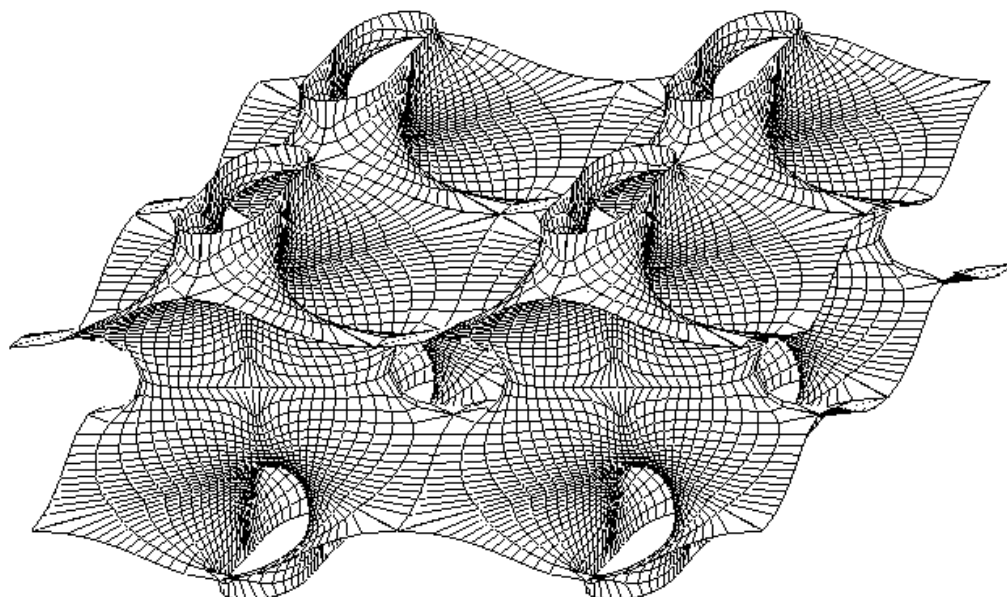


Figura 5.1: Uma superfície de Costa triplamente periódica.

Segundo o método de Karcher, iremos deduzir as condições necessárias para que S seja uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 . Em seguida, provaremos que estas condições são suficientes. Ou seja, a demonstração formal do seguinte teorema começará a partir do momento em que tivermos uma *equação algébrica* de \bar{S} , onde \bar{S} é o *compactificado* de S que se obtém tomando o quociente de S pelo grupo de translações em \mathbb{R}^3 .

Teorema 5.1. Existe uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas triplamente periódicas, mergulhadas em \mathbb{R}^3 , tal que, para qualquer membro desta família, valem as seguintes afirmações:

- (a) O quociente por seu grupo de translações tem gênero 5.
- (b) Tal superfície é gerada por uma *peça fundamental* P , que é uma superfície em \mathbb{R}^3 com bordo. O bordo consiste de quatro curvas planas de simetria reflexional vertical, e duas curvas planas de simetria reflexional horizontal. A peça fundamental tem um grupo de simetria isomorfo a G , onde G é o grupo de simetria da superfície de Costa.
- (c) Por sucessivas reflexões no bordo de P , obtemos a superfície triplamente periódica.

Por um lado, o Teorema 6.13 Capítulo 2 garante que toda superfície de Riemann pode ser descrita por uma equação algébrica. Por outro, o Teorema 6.14 do Capítulo 2 garante que toda equação algébrica descreve uma superfície de Riemann. Para aplicar estes resultados, precisamos de duas funções meromorfas em \bar{S} , que serão z e g . Até a dedução da *equação algébrica* que relaciona estas funções, os argumentos serão *heurísticos*, pois não temos nenhuma descrição formal de \bar{S} .

Primeiramente, vamos deduzir o gênero de \bar{S} . Considere a Figura 5.2(a), que por reflexão na curva plana horizontal superior, parte de seu bordo, gera a superfície \bar{S} . Aquela é homeomorfa à Figura 5.2(b). Vê-se facilmente que duas cópias desta formam uma superfície compacta de gênero 5. Mais tarde, quando tivermos a uma equação algébrica de \bar{S} , iremos provar isso através da *Fórmula de Riemann-Hurwitz* (Teorema 6.7 do Capítulo 2).

Estamos supondo que \bar{S} é invariante por rotação de 180° ao redor do eixo vertical. Considere a Figura 5.4(b) e os pontos do toro T representados nele.

Estes pontos correspondem a pontos especiais de \bar{S} , representados na Figura 5.4(a) (são dados os mesmos nomes). Os pontos marcados por $e_1, e_2, e_{1f}, e_{2f}, e_{1l}, e_{2l}, v_1$ e v_2 representam os oito pontos fixos. Seja ρ a função quociente de \bar{S} por esta rotação. Pela *Fórmula de Euler-Poincaré*, Equação (2.2) do Capítulo 2, temos

$$\chi(\rho(\bar{S})) = \frac{\chi(\bar{S})}{2} + \frac{8}{2} = 1 - 5 + 4 = 0. \quad (5.1)$$

Ou seja, $\rho(\bar{S})$ é um toro T . Observe que as reflexões pelas curvas horizontais de \bar{S} , indicadas na Figura 5.4(a), são induzidas por ρ em T , de modo que T é também invariante por

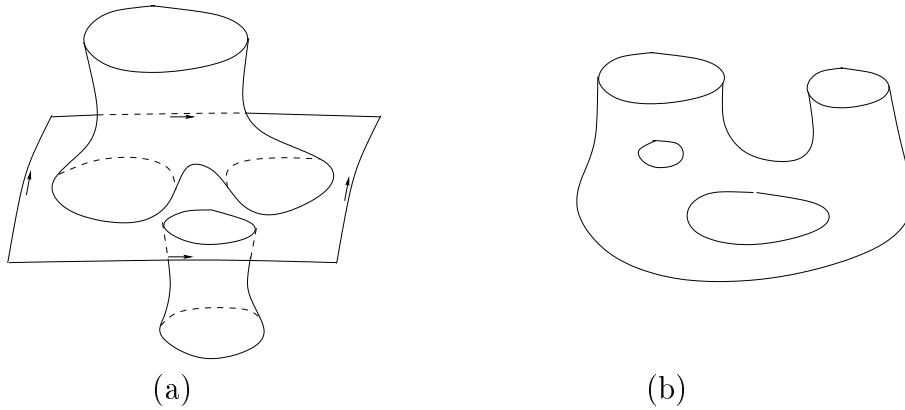


Figura 5.2: (a) Célula fundamental de \bar{S} ; (b) seu equivalente homeomorfo.

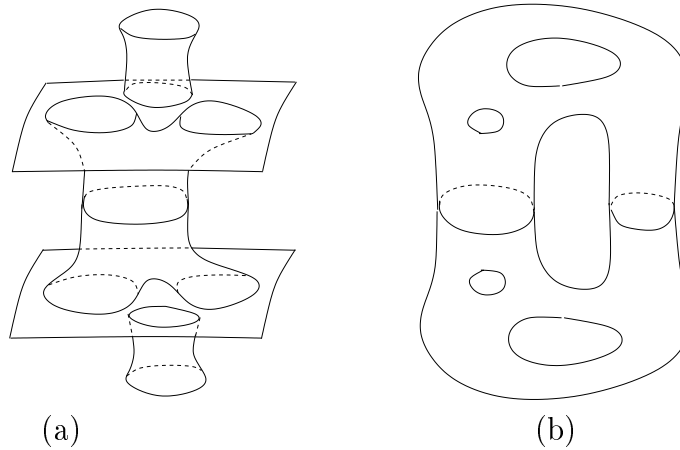


Figura 5.3: (a) \bar{S} ; (b) seu equivalente homeomorfo.

reflexão nas curvas-imagem. Esta reflexão corresponderá a uma involução anti-holomorfa, cujo conjunto de pontos fixos tem duas componentes, a saber, as curvas-imagens. Pelo que estudamos no Capítulo 3, isso caracteriza T como *toro retangular*, e nele está definida a função $Z : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Deste modo, introduzimos $z := Z \circ \rho$. A estrutura complexa de $\hat{\mathbb{C}}$ é induzida por z em \bar{S} , que finalmente a torna uma *superfície de Riemann*.

5.2 A função z em \bar{S} e a aplicação de Gauß em termos de z

Iniciaremos nesta seção o estudo das condições necessárias para a existência de uma superfície mínima como na Figura 5.1. Ela nos levará a uma equação algébrica para a superfície de Riemann \bar{S} , junto com seus dados de Weierstraß. A partir deste ponto, nosso problema será concreto. Provaremos que a equação algébrica realmente corresponde a \bar{S} em termos

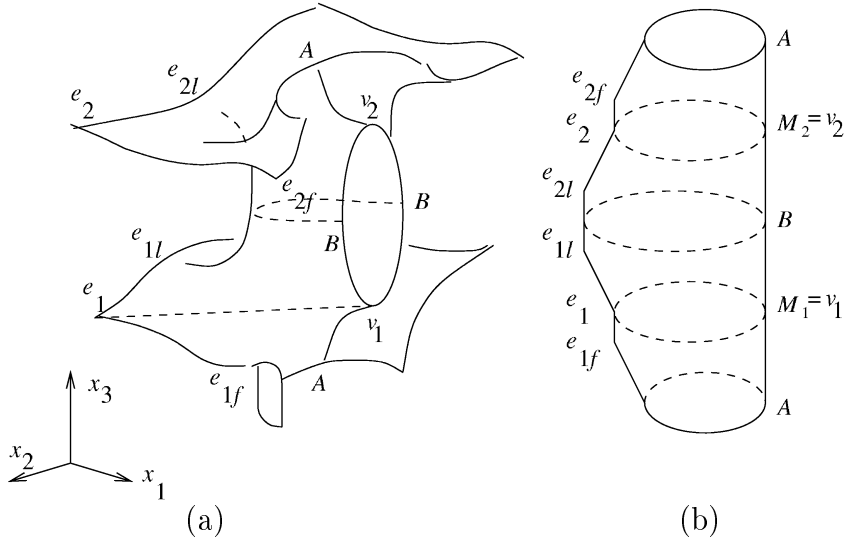


Figura 5.4: (a) Metade de \bar{S} ; (b) o toro $T = \rho(\bar{S})$.

de seu gênero e simetrias. Mais tarde, provaremos que os dados de Weierstraß realmente levam a um mergulho mínimo de \bar{S} em \mathbb{R}^3 com as propriedades consideradas: curvas de simetria, periodicidade, etc.

Seja S a superfície representada na Figura 5.1 e suponha que ela é uma imersão mínima de \bar{S} em \mathbb{R}^3 . Neste caso, faremos o uso da seção anterior e consideraremos as funções $\rho : \bar{S} \rightarrow T$, $Z : T \rightarrow \mathbb{C}$ e $z = Z \circ \rho$. Ambas Z e ρ têm grau 2, então z é uma função em \bar{S} de grau 4 (veja a Figura 5.5(a)).

Suporemos que S é uma imersão mínima de \bar{S} em \mathbb{R}^3 . Neste caso, a aplicação de Gauß em S levará a uma função meromorfa g em \bar{S} , como a Figura 5.5(b) sugere. Definiremos sua *multiplicidade* como a ordem de ramificação mais um. Então, a correspondência esperada entre os valores de z e g (incluindo suas multiplicidades) são as indicadas nas Figuras 5.5(a) e 5.5(b). Note que a Figura 5.5 mostra o caso particular em que g toma os valores $\pm i$ com multiplicidade 3 nos pontos $z = 0$ e também ± 1 nos pontos $z = \infty$. Para este caso especial esperamos que a superfície tenha uma sela de simetria quádrupla nestes pontos e conseqüentemente a curvatura de Gauß $K = 0$. Mostraremos este fato. Notemos que:

$$(1/g + g) = 0 \iff 1 + g^2 = 0 \iff g = \pm i$$

e

$$(1/g + g) = \infty \iff g = 0 \quad \text{ou} \quad g = \infty.$$

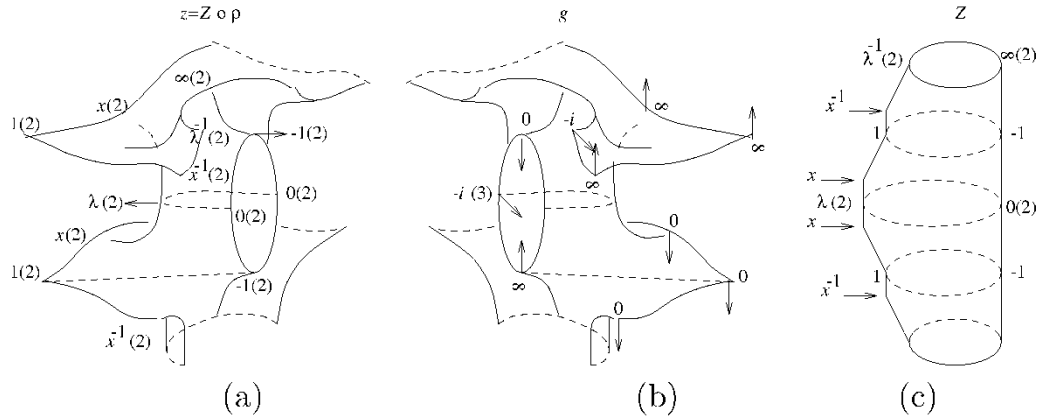


Figura 5.5: (a) Valores de z em pontos especiais; (b) os correspondentes valores de g nestes pontos; (c) os correspondentes valores de Z em T .

No Teorema da Representação de Weierstraß uma condição necessária é que os zeros de dh coincidam com os pólos e zeros de g , ou seja, dh só tem zeros quando $g \in \{0, \infty\}$, pois $\text{ord}(dh) = |\text{ord}(g)| \geq 0$. Agora tome uma carta local $z = y + \zeta$ numa vizinhança de 0. Expandindo g em uma série de Laurent temos a seguinte expressão:

$$g(\zeta) = i + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + \cdots + a_n\zeta^n + \cdots, \quad a_3 \neq 0.$$

Agora derivando g em relação a ζ temos

$$\left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 3a_3\zeta^2 + 4a_4\zeta^3 + \cdots + na_n\zeta^{n-1} + \cdots \Big|_{\zeta=0} = 0.$$

e podemos calcular a curvatura Gaussiana K para $y = 0$ quando $g = i$ com multiplicidade 3

$$K \Big|_{\zeta=0} = \frac{-16}{(|g|^{-1} + |g|)^4} \cdot \left| \frac{dg/g}{dh} \right|^2 \Big|_{\zeta=0} = 0.$$

No caso geral, necessitamos introduzir um novo parâmetro. Considere $y \in (-1, \lambda)$ tal que $z = y$ implica $g(z) = \pm i$ com multiplicidade 1. Para $y = 0$ a multiplicidade é 3 (veja a Figura 5.5). Baseado no que a Figura 5.6 sugere, obtemos a seguinte relação entre g e z :

$$\left(g + \frac{1}{g} \right)^2 = \frac{cz(z-y)^2(z-1/\lambda)}{(z^2-1)(z-x)(z-1/x)}. \quad (5.2)$$

onde c é uma constante real positiva. Note que as funções g e z em ambos os lados de (5.2) têm os mesmos pólos e zeros, incluindo suas multiplicidades, enquanto que c , x , y e

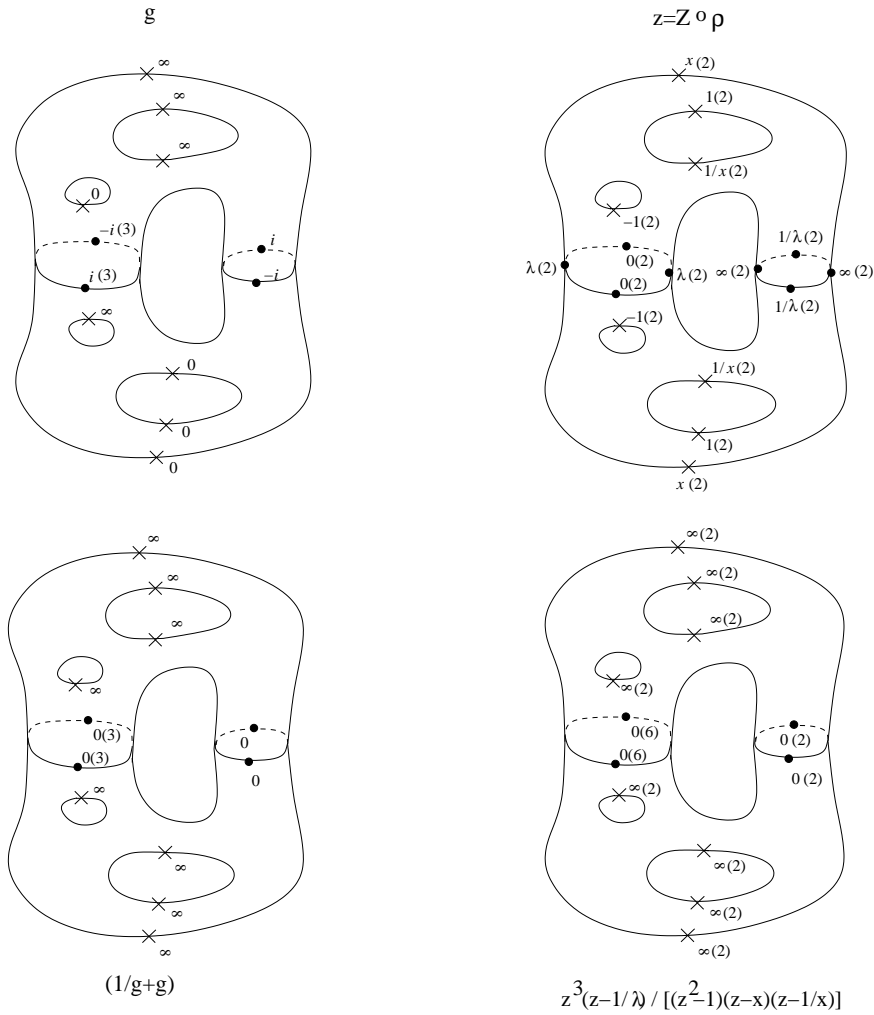


Figura 5.6: (a) Relação entre os valores de g e z .

λ são parâmetros *livres*.

Observe que na dedução de (5.2) não consideramos as simetrias relativas às retas contidas em \bar{S} . De fato, olhando a Figura 5.4(a) de um ponto pertencente ao eixo x_3 observamos que as curvas de simetria vertical de \bar{S} projetam-se num quadrado. Porém, poderíamos ter considerado \bar{S} de modo que esta parte seria um retângulo, e conseqüentemente perderíamos as simetrias em relação às retas de \bar{S} . Note também que as involuções em \bar{S} sempre induzem involuções em T pela aplicação ρ , mas a recíproca não é verdadeira.

Agora temos um problema concreto: Devemos mostrar que (5.2) realmente representa a superfície \bar{S} em termos de seu gênero e simetrias. Isto será válido se as variáveis c , x , y e λ satisfizerem certas condições que serão dadas a seguir. Durante a demonstração deste

fato deduzimos que $c = 4$. As simetrias rotacionais de 180° correspondem à aplicação $Z \rightarrow 1/\bar{Z}$. Devido a isto, temos que $z = 1/\bar{y}$ implica $g = \pm 1$. Isto é consistente com a esperada posição do vetor normal unitário em $z = \infty$ (veja a figura 5.5(a)), que deve corresponder a $g = \pm 1$.

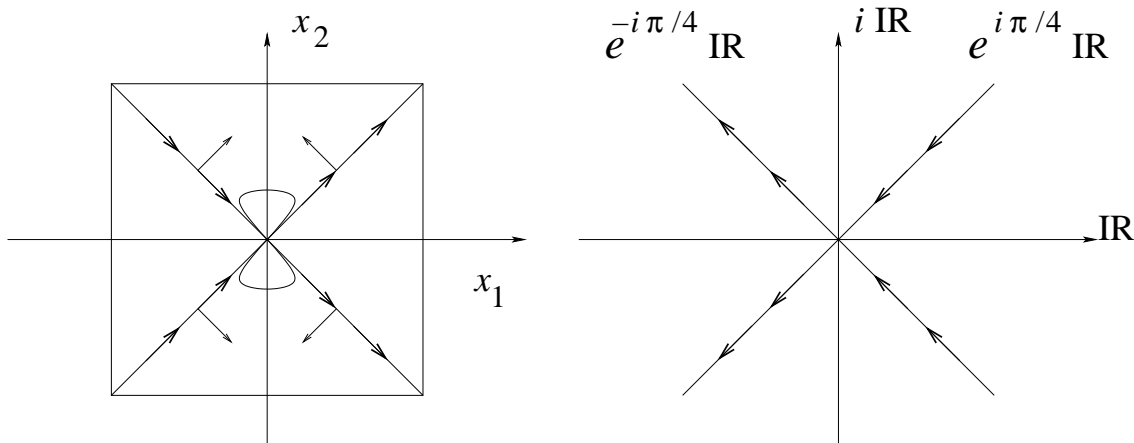


Figura 5.7: Valores complexos de g nas retas de simetrias de \bar{S} .

Agora mostraremos que a função g em \bar{S} definida por (5.2) representa a aplicação de Gauß nas retas de simetria da superfície S vide Figura 5.7. Antes de tudo, para a simetria rotacional de 180° de S , que corresponde a $|z| \equiv 1$ em \bar{S} , queremos que g^2 seja imaginário puro. Defina $X := x + x^{-1}$. Então (5.2) leva a:

$$\begin{aligned}
 g^2 + 2 + 1/g^2 &= \frac{c(z-y)^2 z^2 (1 - 1/\lambda \cdot z)}{z^2(z-1/z)(z-1/x-x+1/z)} \\
 g^2 + 1/g^2 &= \frac{c(z-y)^2 (1 - 1/\lambda \cdot z)}{(z-1/z)(z-X+1/z)} - 2 \\
 g^2 + g^{-2} &= \frac{c(z-y)^2 (1 - \lambda^{-1} z^{-1}) - 2(z-z^{-1})(z-X+z^{-1})}{(z-z^{-1})(z-X+z^{-1})}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

No lado direito de (5.3) o denominador é imaginário puro. Pois

$$|z| = 1 \quad \text{implica} \quad z - 1/z = 2i \sin t \quad \text{imag. puro}$$

e

$$z + z^{-1} - X = 2 \cos t - X \quad \text{real}$$

Para $g^2 + g^{-2}$ (e conseqüentemente g^2) ser também imaginário puro

$$g^2 = is \quad \text{implica} \quad 1/g^2 + g^2 = i(s - 1/s)$$

e

$$1/g^2 + g^2 = i\alpha \quad \text{implica} \quad g^4 - i\alpha g^2 + 1 = 0$$

$$g^2 = \frac{i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 - 4}}{2} \quad \text{imag. puro}$$

devemos ter

$$\Im\{c(z-y)^2(1-\lambda^{-1}z^{-1})\} = \Im\{2(z-z^{-1})(z-X+z^{-1})\}. \quad (5.4)$$

Para $z = e^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, (5.4) nos leva a:

$$c(2\cos t - 2y - \lambda^{-1} + \lambda^{-1}y^2) = 4(2\cos t - X).$$

Isto é possível se, e somente se $c = 4$, pois esta é uma função em t derivando temos

$$-2c \sin t = -8 \sin t, \quad \text{para todo } t$$

e

$$X = \frac{1 + (2\lambda - y)y}{\lambda}, \quad \text{onde } X := x + x^{-1}. \quad (5.5)$$

Recordemos que as variáveis x , y e λ devem satisfazer as seguintes desigualdades (veja a figura 5.5(a)):

$$-1 < y < \lambda < x < 1 \quad e \quad 0 < \lambda. \quad (5.6)$$

Podemos sempre escolher y e λ com $-1 < y < \lambda < x < 1$ e $0 < \lambda$ obtendo-se o valor x por (5.5). No entanto, a condição $x < 1$ nem sempre será satisfeita, a menos que $y > 2\lambda - 1$. De fato, escolha $\lambda \in (0, 1)$, $y \in (-1, \lambda)$, e tome X como em (5.5). Agora devemos fazer a seguinte pergunta: a desigualdade $\lambda < x < 1$ é válida? Esta será válida se, e somente se,

$$2 < X < 1/\lambda + \lambda \quad \iff \quad 2 < \frac{1 + (2\lambda - y)y}{\lambda} < 1/\lambda + \lambda$$

$$\iff \quad 2\lambda < 1 + (2\lambda - y) < 1 + \lambda^2 \quad \iff \quad 2\lambda - 1 < (2\lambda - y)y < \lambda^2.$$

Agora, $0 < \lambda < 1$ equivale a $-1 < 2\lambda - 1 < 1$. Da inequação $2\lambda - 1 < 2\lambda y - y^2 < \lambda^2$ podemos obter duas desigualdades:

$$y^2 - 2\lambda y + \lambda^2 > 0 \quad (\text{I})$$

$$y^2 - 2\lambda y + 2\lambda - 1 < 0 \quad (\text{II}).$$

As raízes de (I) são

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda^2}}{2} = \lambda,$$

donde (I) sempre se verifica. Por outro lado, as raízes de (II) são

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4(2\lambda - 1)}}{2} = \frac{2\lambda \pm 2\sqrt{(\lambda - 1)^2}}{2} = \lambda \pm (1 - \lambda) \in \{1, 2\lambda - 1\}.$$

Com isso, (II) se verifica se e somente se $2\lambda - 1 < y < 1$. Ou seja, λ é qualquer valor no intervalo aberto $(0, 1)$, mas y não é qualquer valor no intervalo aberto $(-1, \lambda)$. Devemos restringir $y \in (2\lambda - 1, \lambda) \subset (-1, 1)$. Note que $2\lambda - 1 < \lambda$ pois $\lambda < 1$. Assim, obtemos a equivalência

$$y \in (2\lambda - 1, \lambda) \iff x \in (\lambda, 1). \quad (5.7)$$

Neste ponto mostramos que, sob as condições de (5.5) e $y > 2\lambda - 1$, a fase da função g em (5.2) é constante e igual a $\pm\pi/4$ ou $\pm 3\pi/4$ nas retas de simetria da superfície de Riemann \bar{S} que nós queremos que sejam as linhas retas na superfície mínima S . Agora iremos provar que a rotação de 180° sobre as linhas retas leva à mudança esperada do vetor normal unitário. Pelas Figuras 5.5(a) e 5.5(b), estas rotações sugerem que, por exemplo, $g = 1$ é mapeada para $g = \pm i$. Iremos agora verificar este fato.

Uma consequência importante de (5.5) é que ela implica:

$$4z(z - y)^2(z - \lambda^{-1}) - 4(z^2 - 1)(z - x)(z - x^{-1}) = 4(1 - yz)^2(1 - \lambda^{-1}z). \quad (5.8)$$

Com (5.3), (5.8) e a igualdade algébrica

$$(g + g^{-1})^2 - 4 = (g - g^{-1})^2,$$

obtemos:

$$\left(g - \frac{1}{g}\right)^2 = \frac{4(1 - yz)^2(1 - \lambda^{-1}z)}{(z^2 - 1)(z^2 - Xz + 1)}. \quad (5.9)$$

As simetrias rotacionais de 180° sobre as linhas retas da superfície S são representadas por meio da aplicação $z \rightarrow 1/\bar{z}$ em \bar{S} (note que os pontos $|z| = 1$ permanecem fixos). Se calcularmos $g(1/\bar{z})$ por (5.9), obteremos:

$$\begin{aligned} \left(g - \frac{1}{g}\right)^2 \Big|_{1/\bar{z}} &= -\left(\bar{g} + \frac{1}{\bar{g}}\right)^2 \Big|_z, \\ \left(g(1/\bar{z}) - \frac{1}{g(1/\bar{z})}\right)^2 &= \frac{4(1 - y1/\bar{z})^2(1 - \lambda^{-1}1/\bar{z})}{(1/\bar{z}^2 - 1)(1/\bar{z}^2 - X1/\bar{z} + 1)} = \frac{4(1/\bar{z}(\bar{z} - y))^2(1/\bar{z}(\bar{z} - \lambda^{-1}))}{(1/\bar{z}^2(1 - \bar{z}^2))(1/\bar{z}^2(1 - X\bar{z} + \bar{z}^2))} \\ &= -\frac{4\bar{z}(\bar{z} - y)^2(\bar{z} - \lambda^{-1})}{(\bar{z}^2 - 1)(1 + X\bar{z} - \bar{z}^2)} = -\left(\bar{g} + \frac{1}{\bar{g}}\right)^2. \end{aligned}$$

Agora,

$$\left(f - \frac{1}{f}\right)^2 = -\left(s + \frac{1}{s}\right)^2 \iff f^2 + \frac{1}{f^2} = -\left(s^2 + \frac{1}{s^2}\right) \iff f = \pm is \text{ ou } f = \pm i/s.$$

Então

$$(I) g \rightarrow \pm i\bar{g} \quad \text{ou} \quad (II) g \rightarrow \pm i/g.$$

Observe a Figura 5.7 e o ponto nela indicado em que $g = e^{-i\pi/4}$. Temos

$$(I) \pm i \cdot \overline{e^{-i\pi/4}} = \pm e^{-i\pi/4};$$

$$(II) \pm i / \overline{e^{-i\pi/4}} = \pm e^{i\pi/4}.$$

Conseqüentemente, (II) não representa nenhuma das duas possíveis imagens de $g = e^{-i\pi/4}$ por rotação de 180° ao redor dos segmentos de reta. Assim vale somente (I).

Isto quer dizer: As rotações de 180° de S levam às seguintes aplicações pela função g : ou $g \rightarrow i\bar{g}$ ou $g \rightarrow -i\bar{g}$. O conjunto de pontos fixos daquela é dado por $\{(z, g); |z| = 1 \text{ e } g = e^{i\pi/4}|g|\}$. Para a outra, o conjunto de pontos fixos é $\{(z, g); |z| = 1 \text{ e } g = e^{-i\pi/4}|g|\}$. Ambas aplicações correspondem a uma inversão da superfície orientada.

Agora provaremos que a superfície de Riemann compacta (5.9) têm gênero 5. Por (5.2) e (5.9) temos que todos os valores $z \in \{-1, 1, x, x^{-1}, \lambda, \lambda^{-1}, 0, \infty\}$ representam 2 pontos de ramificação diferentes de ordem 1 (multiplicidade 2) na superfície de Riemann compacta. A função g é um recobrimento de quatro folhas e devido a isso, pela fórmula de Riemann-Hurwitz o gênero de \bar{S} é:

$$\frac{8 \cdot 2 \cdot (2 - 1)}{2} - 4 + 1 = 5.$$

Devemos mostrar o seguinte:

Proposição 6.1. Dado λ e y no intervalo $(-1, 1)$ tal que $y > 2\lambda - 1$, se x e c são determinados por (4) então $x < 1$.

Prova. Isto é uma consequência da equivalência das seguintes asserções:

- (a) $y > 2\lambda - 1$;
- (b) $(1 - \lambda)^2 > (\lambda - y)^2$;
- (c) $2\lambda < 1 + (2\lambda - y)y$;
- (d) $X > 2$.

(a) \Leftrightarrow (b)

$$y > 2\lambda - 1 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 > (\lambda - y)^2 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 > \lambda^2 - 2\lambda y + y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2\lambda y + 2\lambda - 1 < 0$$

Para esta última desigualdade temos

$$\frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 8\lambda + 4}}{2} = \frac{2\lambda \pm 2(1 - \lambda)}{2} = \lambda \pm (1 - \lambda)$$

onde

$$\lambda = 1 \quad \text{ou} \quad 2\lambda - 1 < 1 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 < y < 1.$$

(b) \Leftrightarrow (c)

$$2\lambda < 1 + 2\lambda y - y^2 \Leftrightarrow y^2 - 2\lambda y + 2\lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^2 > (\lambda - y)^2 \Leftrightarrow 2\lambda < 1 + (2\lambda - y)y.$$

(c) \Leftrightarrow (d)

$$X = \frac{1 + (2\lambda - y)y}{\lambda} > 2 \Leftrightarrow 1 + (2\lambda - y) > 2\lambda.$$

Até aqui provamos que a correspondência entre z e g , dado por (5.2) ou (5.9), é consistente para as linhas retas. Agora focaremos a atenção nas linhas de simetria que restaram. Chamaremos de r^2 o lado esquerdo de (5.2). Então, para todo valor complexo r e algum ramo da raiz quadrada temos:

$$g^{-1} + g = r \quad \text{implica} \quad g = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2}.$$

Portanto, por (5.2) e baseado na Figura 5.1 podemos verificar brevemente os valores de g nas curvas de simetrias planares como segue:

1	$-1 < z < 0$	$r \in i\mathbb{R}$	$g \in i\mathbb{R}$
2	$-\infty < z < -1$	$r \in (2, \infty)$	$g \in \mathbb{R}$
3	$\lambda^{-1} < z < \infty$	$r \in (0, 2)$	$ g = 1$
4	$x^{-1} < z < \lambda^{-1}$	$r \in i\mathbb{R}$	$g \in i\mathbb{R}$
5	$1 < z < x^{-1}$	$r \in \mathbb{R}$	$g \in \mathbb{R}$
6	$x < z < 1$	$r \in i\mathbb{R}$	$g \in i\mathbb{R}$
7	$\lambda < z < x$	$r \in r \in (2, \infty)$	$g \in \mathbb{R}$
8	$0 < z < \lambda$	$r \in r \in (0, 2)$	$ g = 1$

(5.10)

Acabamos de provar que os valores de g em todas as curvas de simetria da superfície de Riemann \bar{S} são consistentes com o vetor normal unitário esperado na superfície mínima S em \mathbb{R}^3 .

5.3 A diferencial altura dh em termos de z

Agora necessitaremos de uma expressão para a forma diferencial dh . A superfície não tem fns e devido a isso dh é holomorfa. Seus zeros são exatamente os mesmos de $g + 1/g$, a saber $g = 0$ e $g = \infty$, todos com multiplicidade 1. Por exemplo, tomando uma carta $z = 1/\zeta^2$, ζ variando em uma vizinhança de 0, e calcularmos a série de Laurent da equação (5.2). Observe que a carta $z = 1/\zeta^2$ é a própria série de Laurent. Assim temos que:

$$(g + 1/g)^2 = 4 \cdot \frac{1/\zeta^2(1/\zeta^2 - y)^2(1/\zeta^2 - 1/\lambda)}{(1/\zeta^2 - 1)(1/\zeta^2 - x)(1/\zeta^2 - 1/x)} = 4 \cdot \frac{1}{\zeta^2} \frac{(1 - \zeta^2 y)(1 - \zeta^2/\lambda)}{(1 - \zeta^2)(1 - \zeta^2 x)(1 - \zeta^2/x)}.$$

Para obtermos dh , se considerarmos a forma diferencial dz , vejamos que será suficiente dividi-la por uma função na superfície cujo os zeros são simples em $z \in \{0, \lambda, \lambda^{-1}\}$ e com um único pólo (de multiplicidade 3) em $z = \infty$. Ou seja, considere as 1-formas meromorfas dz e dh definidas em um ponto $p \in \bar{S}$ e tome uma carta local ζ . Localmente temos as seguintes expansões em séries de Laurent para dz e dh .

$$dz = \left(\frac{a_{-n}}{\zeta^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{\zeta} + a_0 + a_1\zeta + \cdots \right) d\zeta.$$

e

$$dh = \left(\frac{b_{-m}}{\zeta^m} + \cdots + \frac{b_{-1}}{\zeta} + b_0 + b_1\zeta + \cdots \right) d\zeta.$$

Assim temos uma função meromorfa $f = dh/dz$. Note que $z = \infty^k \rightarrow dz = \infty^{k+1}$ e $z = r(2) \rightarrow dz = 0(1)$. Para mostrarmos que isto é válido, seja $z = 0$ de multiplicidade 2 em \bar{S} e tome uma carta local $z = \zeta^2$ em uma vizinhança de 0. Com isso temos que $dz = 2 \cdot \zeta d\zeta$. Logo para $\zeta = 0$ temos que $dz = 0$. Para $z = \infty$ de multiplicidade 2, tome uma carta local $z = 1/\zeta^2$, assim temos que $dz = -2 \cdot 1/\zeta^3 d\zeta$. Conseqüentemente para $\zeta = 0$ temos que $dz = \infty^3$. Observe que as cartas coincidem com as séries de Laurent numa vizinhança de $\zeta = 0$. Agora para a 1-forma dh basta analisarmos os pólos e zeros de g em \bar{S} . Veja a figura abaixo.

Pelo Teorema 6.11 temos que:

$$\begin{aligned} \deg(dz) &= -\chi = 2 \cdot 5 - 2 = 8 = 14 - 6. \\ \deg(dh) &= -\chi = 2 \cdot 5 - 2 = 8 = 8 - 0. \end{aligned}$$

Pela Figura 5.8 podemos questionar se existe uma f tal que $f^2 = F$. A resposta a esta pergunta é sim. Pois $f = dh/dz$ só não existe se não existir dh e isso implicaria a não-existência de \bar{S} . Esta função resulta da indução pela ρ de outra função, que chamaremos de V , no toro T .

Uma vez que $0, \lambda, \lambda^{-1}$ e ∞ são somente os valores de ramo de Z , todos eles de ordem um, então o toro T pode ser algebricamente descrito pela equação $V^2 = Z(Z - \lambda)(Z - \lambda^{-1})$, e $V \circ \rho$ têm exatamente os zeros e pólos em \bar{S} com as respectivas multiplicidades. Definimos $v := V \circ \rho$. Isto quer dizer que v é uma raiz quadrada bem definida da função $z(z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}z)$ em \bar{S} . Vale ressaltarmos que nem todo polinômio em \bar{S} teria uma raiz quadrada ainda definida em \bar{S} , mas em geral numa outra superfície de gênero maior, recobrimento ramificado de \bar{S} . Em particular isto não acontece aqui. Um outro exemplo é o toro do Capítulo 3. Nele temos não só o polinômio $Z(Z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}Z)$, mas também suas raízes quadradas $\pm Z'$. Voltando à \bar{S} , uma expressão de v é obtida de (5.2) e (5.9):

$$\left(g + \frac{1}{g}\right)^2 \cdot \left(g - \frac{1}{g}\right)^2 = \frac{16(z - y)^2(yz - 1)^2}{(z^2 - 1)^2(z^2 - Xz + 1)^2} \cdot z(z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}z),$$

donde

$$z(z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}z) = \frac{(z^2 - 1)^2(z^2 - Xz + 1)^2}{16(z - y)^2(yz - 1)^2} \left(g + \frac{1}{g}\right)^2 \left(g - \frac{1}{g}\right)^2.$$

Então, podemos definir

$$\sqrt{z(z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}z)} := v = \frac{(z^2 - 1)(z^2 - Xz + 1)}{4(z - y)(yz - 1)} \left(g + \frac{1}{g}\right) \left(g - \frac{1}{g}\right).$$

Finalmente, necessitamos encontrar uma constante proporcional para determinar dh por meio de dz/v . Nas linhas retas da superfície, onde $|z| \equiv 1$, a coordenada $x_3 = \Re \int dh$ será constante. Então $\Re\{dh\}$ é zero aí. Devido a isso escolhemos a constante proporcional igual a 1, a saber

$$dh = \frac{dz}{v} = \frac{dz}{\sqrt{z(z - \lambda^{-1})(1 - \lambda^{-1}z)}} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} z^{-1} dz}{\sqrt{\lambda + \lambda^{-1} - z - z^{-1}}}. \quad (5.11)$$

Neste ponto chegamos aos dados de Weierstraß concretos (g, dh) em \bar{S} , definidos por (5.9) e (5.11), com x , y e λ satisfazendo (5.5) para y no intervalo $(2\lambda - 1, \lambda)$. Agora nossa tarefa será a demonstração do seguinte: Seja S a imersão mínima de \bar{S} por estes dados de Weierstraß. Então S representa a superfície da Figura 5.2. Em outras palavras, necessitamos mostrar que S realmente tem todas as linhas e retas de simetrias de nossa hipótese inicial e S não tem outros períodos exceto aqueles indicados na Figura 5.2. A segunda tarefa será discutida no próximo capítulo. Agora analisaremos as simetrias de S .

Iremos uzar os Teoremas 7.17 e 7.18 do Capítulo de Preliminares. Por (5.10) e (5.11) vemos que todas as curvas z listadas em (5.10) são geodésicas pois $g(z)$ está contida ou num meridiano ou no equador de S^2 e $dh(\dot{z})$ está contida num meridiano principal de S^2 . Além disso, estas geodésicas são planares pois $\frac{dg(\dot{z})}{g(z)} \cdot dh(\dot{z}) \in \mathbb{R}$. As linhas retas da superfície, onde $|z| \equiv 1$, vêm por (5.5) junto com $y \in (2\lambda - 1, \lambda)$. De fato, tínhamos já provado que (5.5) leva a $g/|g| = e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ na linhas retas. Isto quer dizer, $|z| \equiv 1$ implica $\frac{dg(\dot{z})}{g(z)} \cdot dh(\dot{z}) \in i\mathbb{R}$. Portanto, S tem todas as simetrias consideradas.

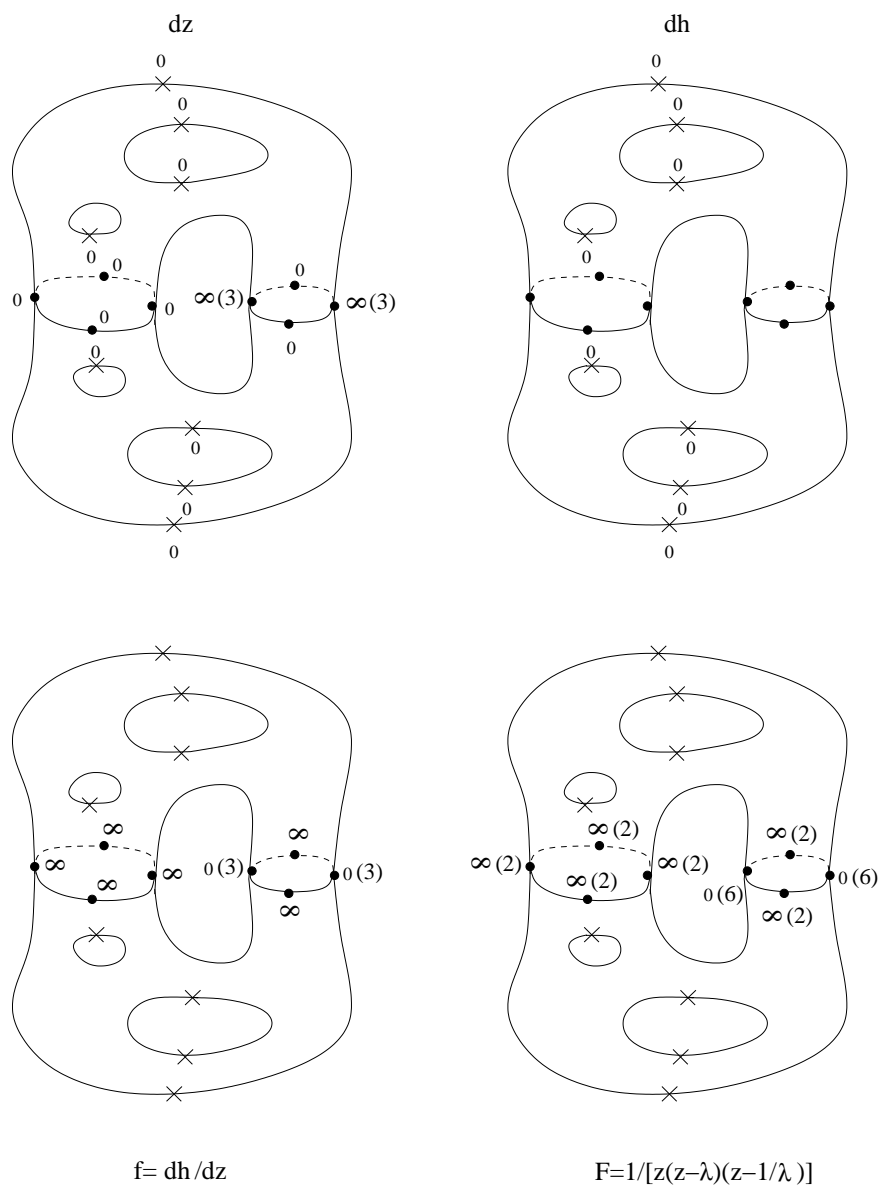


Figura 5.8: Valores de dz e dh em \bar{S} .

Capítulo 6

O Problema dos Períodos

6.1 Solução

O quociente da superfície mínima triplamente periódica pelo seu grupo de translação leva a uma superfície compacta \bar{S} . A metade esquerda de \bar{S} está representada na Figura 6.1(a). O domínio fundamental do grupo de simetria da superfície mínima é a região hachurada representada na Figura 6.1(a).

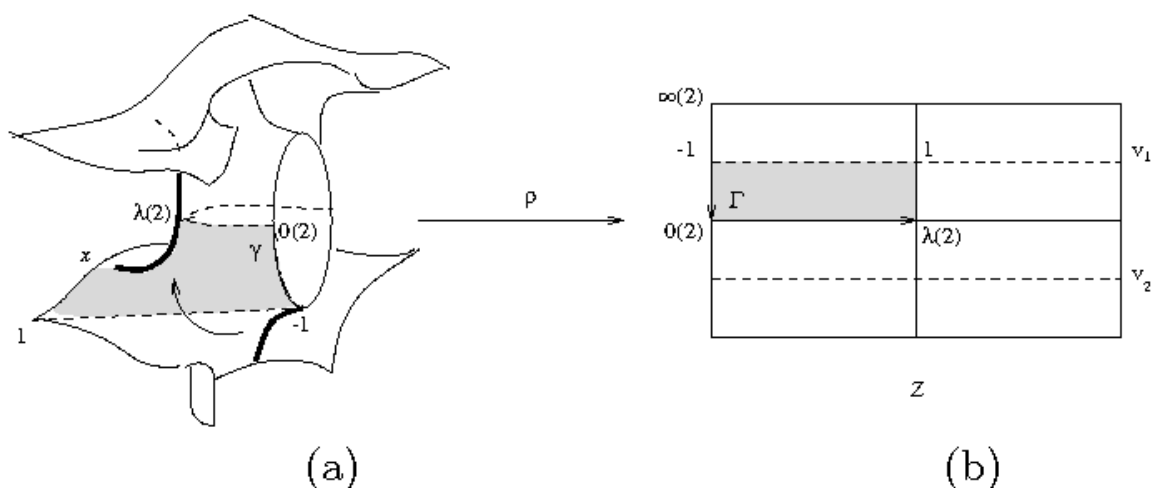


Figura 6.1: (a) A metade esquerda de \bar{S} ; (b) sua imagem pela ρ .

De acordo com a Proposição 3.3 e Seção 2.8 do Capítulo de Preliminares, basta analisarmos o vetor período dado por $\Re \mathcal{F}(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ nas curvas de homologia de \bar{S} . Observe-mos em particular que os geradores da homologia em \bar{S} são 10 curvas fechadas. Iremos analisar curvas em que o período se anula automaticamente, apenas devido a argumentos geométricos. Sobrarão 4 curvas para as quais estes argumentos são insuficientes. Mas

estas quatro curvas são imagem uma da outra por reflexões da superfície, de modo que basta analisar somente uma delas (vide Figura 6.1).

Por exemplo, a curva (1) da Tabela 5.10 é concatenação de γ com sua reflexão em $x_3 = 0$ (trocando orientação). Considere agora as curvas (1) a (8) da Tabela 5.10 como curvas fechadas. A curva (1) cruza as geodésicas planares (2) e (8), que estão em planos ortogonais. Portanto, o período em (1) é zero. Mostraremos este fato por argumentos puramente geométricos: Considere o plano $x_2 = 0$, que contém a curva (2), e o plano $x_3 = 0$, que contém a curva (8). Note que em ambos os casos vale o Princípio de Reflexão de Schwarz em \bar{S} . Agora pela imersão $X(g, dh)$ em relação a curva (1) pode acontecer que o vetor período seja diferente de zero e assim teríamos uma curva-imagem não fechada e periódica. Nesta curva-imagem o Princípio de Reflexão de Schwarz continua válido e temos portanto que $\Re \oint (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ é perpendicular ao plano x_2 . Com o mesmo raciocínio concluímos que o vetor período é perpendicular ao plano x_3 . Assim, é nulo na curva de homologia (1). Veja Figura abaixo.

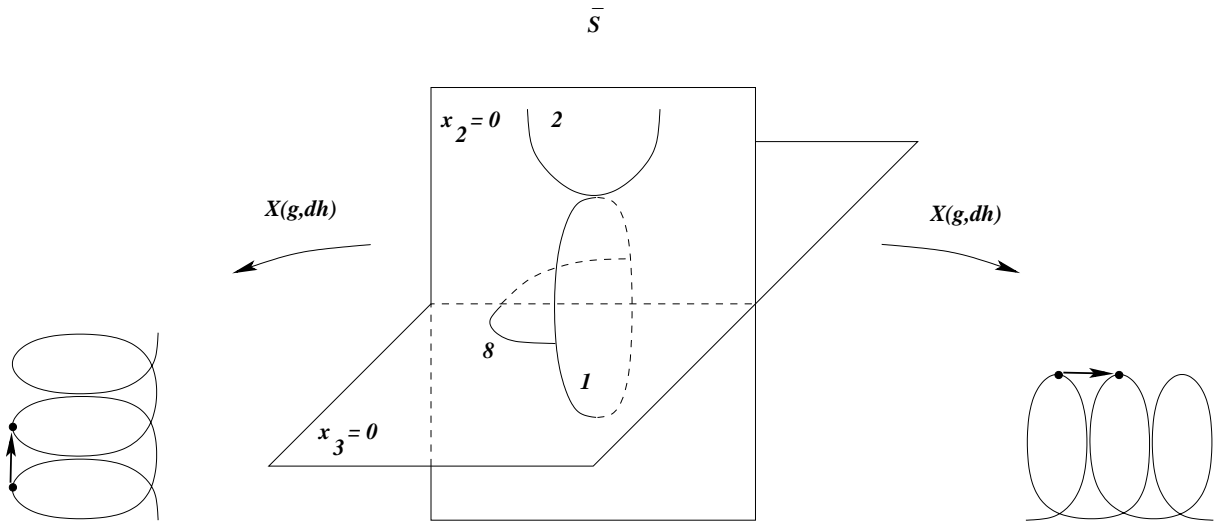


Figura 6.2: (a) O vetor período na curva de homologia (1) em relação às curvas (2) e (8).

A curva (3) cruza as geodésicas planares (2) e (4). Então, o período em (3) é zero. A mesma conclusão é válida para (4), que cruza (3) e (5). As linhas retas em S levam (1), (3) e (4) respectivamente a (2), (8) e (7). Então, os períodos nestas três últimas curvas é zero também.

No entanto, (5) cruza ortogonalmente (4) e (6), que estão em planos paralelos a $x_1 = 0$. Então, (5) tem um período exatamente na direção x_1 . Devido às linhas retas em S , que intercambiam (5) e (6), o período em (6) é exatamente na direção x_2 . Agora considere a Figura 5.3(b) e o segmento de reta que contém A e B representados nela. Sua imagem inversa por ρ é uma curva fechada em \bar{S} que cruza (3) e (8) ortogonalmente. Uma vez que (3) e (8) são paralelas a $x_3 = 0$, o período na curva será exatamente na direção x_3 .

Um cálculo simples pode mostrar que os períodos mencionados neste parágrafo não são zeros. Mas, se mostrarmos que eles são somente os períodos de S , então o *teorema do semi-espaço* automaticamente garante que nenhum deles é zero (veja[5], p. 29). Para mostrarmos isso, primeiramente notemos que os dados de Weirestraß (g, dh) levam \bar{S} a uma imersão mínima em \mathbb{R}^3 , onde \bar{S} é uma superfície de Riemann compacta. Com isso podemos concluir que a imersão mínima é própria, isto é, a pré-imagem de todo conjunto compacto é compacto.

Isto simplesmente porque a imersão é uma função contínua, cuja imagem inversa de fechados é fechada. Todo fechado de \bar{S} é compacto, pois \bar{S} é compacto. Assim temos que S satisfaz todas as hipóteses do teorema do semi-espaço. Agora suponha que um dos três períodos de S fosse nulo. Então S estaria contida entre dois planos paralelos, ou seja, pelo teorema do semi-espaço seria um plano. Mas isso é um absurdo, pois a função g não é constante. Logo existem somente os três períodos os quais geram a superfície S em \mathbb{R}^3 .

Devido às linhas retas em S , ainda resta justamente uma curva em \bar{S} cujo período devemos analisar. Esta curva chamaremos de γ e ela está representada na Figura 6(a). A curva γ pode ser explicitamente dada por $z \circ \gamma(s) = s$, $-1 < s < \lambda$. Pela Figura 6(a), vemos que γ cruza ortogonalmente as geodésicas (1) e (7), que estão em planos paralelos a $x_2 = 0$. De fato, basta considerarmos a rotação de 180° em \bar{S} que corresponde à involução $z \mapsto 1/\bar{z}$ no toro. Portanto, nossa tarefa reduz-se à solução da seguinte igualdade:

$$\Re \int_{\gamma} \phi_2 = \Re \int_{\gamma} \frac{i}{2}(g + g^{-1})dh = 0 \quad (6.1)$$

Para interpretar (6.1) geometricamente, considere as curvas em negrito da Figura 6.1(a). A figura supõe que elas estejam no mesmo plano, e esta condição é representada por (6.1). O integrando ϕ_2 tem dois parâmetros livres, a saber λ e y . Se fixarmos o parâmetro λ , podemos variar o parâmetro y e tentar fazer (6.1) valer. Em outras palavras, obtemos as duas curvas em negrito no mesmo plano. Senão, elas permanecem em planos paralelos distintos.

Agora observe a Figura 6.1(b). Definimos $\Gamma := \rho \circ \gamma$. Então, $Z \circ \Gamma(s) = z \circ \gamma(s) = s$. Necessitamos calcular o integrando de (6.1) em $\gamma(s)$. Para facilitar, particionaremos ambas as curvas γ e Γ em dois trechos, um para $-1 < s < 0$ e a outro para $0 < s < \lambda$. Os ramos de raiz quadrada precisam ser escolhidos de acordo com as Figuras 6.1(a) e 6.1(b). Neste ponto recordemos que a equação algébrica do toro T é descrita por

$$Z'^2 = Z(Z - \lambda)(Z - \lambda^{-1}). \quad (6.2)$$

Defina $\gamma_1(s) = \gamma(s)$, $\Gamma_1 = \Gamma(s)$ para $-1 < s < 0$ e $\gamma_2(s) = \gamma(s)$, $\Gamma_2(s) = \Gamma(s)$ para $0 < s < \lambda$. No intervalo $-1 < s < 0$ tomamos $s(t) = -t$, $0 < t < 1$. Então, em γ_1 e Γ_1 temos:

$$\left(\frac{1}{g} + g\right)^2 \Big|_{\gamma_1(s(t))} = \frac{-4t(t+y)^2(t+\lambda^{-1})}{(1-t^2)(t+x)(t+x^{-1})} < 0, \quad 0 < t < 1, \quad (6.3)$$

$$Z'^2(\Gamma_1(s(t))) = t^2(-(t+t^{-1}) - (\lambda + \lambda^{-1})) < 0.$$

Precisamos escolher a raiz quadrada com sinais compatíveis com a escolha do caminho de integração representado nas Figuras 6.1(a) e 6.1(b). De agora em diante consideremos positiva a raiz quadrada de reais positivos. Agora observe o seguinte:

$$-1 = \frac{d}{dt}(Z(s(t))) = Z'(\Gamma_1(t)) \cdot \Gamma_1'(t).$$

Isto quer dizer que $Z'(\Gamma_1(t)) \cdot \Gamma_1'(t)$ é real. Pela Figura 6.1(b) e a Equação (6.3), nossa escolha nos leva a concluir que $i\Gamma_1'(t) > 0$, pois $\Gamma_1(t) = \text{cte.real} + if(t)$ onde f é real decrescente. Logo $\Gamma_1'(t) = if'$, donde $iZ'(\Gamma_1(t)) > 0$, a saber, $Z'(t) = -i\sqrt{t(t+\lambda)(t+\lambda^{-1})}$. Ou seja, $-1 = Z'(\Gamma_1(t)) \cdot \Gamma_1'(t)$ é equivalente a $(-1)(-1) = iZ'(\Gamma_1(t)) \cdot i\Gamma_1'(t) = 1$ e escolhemos a raiz quadrada real positiva tendo assim $Z'(\Gamma_1(t)) = -i \cdot \text{raiz pos.}$

Então $dh = \frac{idt}{Z'(t)} > 0$, $0 < t < 1$, que está de acordo com nossa escolha indicada nas Figuras 6.1(a) e 6.1(b). É claro, isto quer dizer que a terceira coordenada de nossa superfície mínima ($x_3 = \Re \int dh$) é decrescente ao longo deste caminho, que vai de $z = 0$ até $z = -1$, ou equivalentemente, de $Z = -1$ até $Z = 0$ (veja Figura 6.1(a)). Mas há duas posições diferentes em que $z = 0$ (atrás e na frente da peça). O que queremos é a parte da frente, como representado na Figura 6.1(a). Nesta figura, vemos que em γ_1 o vetor normal unitário na superfície é levado a $-ig < 0$. Então escolhemos nossa raiz quadrada para $g^{-1} + g$ em (6.3) de modo que tenhamos $-i(g^{-1} + g) \circ \gamma_1 > 0$, ou equivalentemente, $-ig < 0$ implica $0 < |g| < 0$ sendo que $g = -i|g|$ então $-i(g^{-1} + g) \circ \gamma_1 = -i((-i|g|)^{-1} - i|g|) \circ \gamma_1 > 0$. Ou seja,

$$\phi_2(\gamma_1(s(t))) = \frac{-(t+y)dt}{\sqrt{(1-t^2)(t+x)(t+x^{-1})(t+\lambda)}}. \quad (6.4)$$

Para γ_2 e Γ_2 tomamos $s(t) = t$, $0 < t < \lambda$. Portanto:

$$\left(\frac{1}{g} + g\right)^2|_{\gamma_2(s(t))} = \frac{4t(t-y)^2(\lambda^{-1} - t)}{(1-t^2)(x-t)(x^{-1}-t)} > 0.$$

Baseado em (6.2) e na Figura 6.1(b) temos que $\Gamma_2'(t) > 0$, pois $\Gamma_2(t) = \tilde{f}(t) + i \text{cte.real}$ onde \tilde{f} é real crescente e $\frac{d}{dt}(Z(t)) = 1$ implica $Z'(\Gamma_2(t)) > 0$. Com um argumento análogo ao de antes escolhemos $g^{-1} + g < 0$. Então

$$\phi_2(\gamma(t)) = \frac{(t-y)dt}{\sqrt{(1-t^2)(x-t)(x^{-1}-t)(\lambda-t)}}. \quad (6.5)$$

Neste ponto estamos preparados para escrever abaixo (6.1) como uma igualdade entre duas integrais reais. Mas primeiro recordemos (veja (5.5)):

$$(-2\lambda + y)y = 1 - (x + x^{-1})\lambda \Rightarrow y = \lambda - \sqrt{(x-\lambda)(x^{-1}-\lambda)}.$$

O fato do problema de período ser resolvido para todo λ no intervalo $(0; 0.6 + \epsilon)$, onde $\epsilon > 0$, e mais ainda, que a solução é **única** para todo λ fixo neste intervalo, está provado em

[RamosBatista1]. Tal demonstração é essencialmente técnica, e se pauta por manipulação de integrais e argumentos muito mais analíticos que geométricos. O valor teórico de ϵ não é conhecido ainda, mas cálculos numéricos indicam que $\epsilon = 0.05$. Recordemos que (5.6) é válido mediante $y \in (2\lambda - 1, \lambda)$. Resumimos estes comentários na seguinte proposição provada em [RamosBatista1], p.3:

Proposição 6.1. *Para um certo $\epsilon < 0.4$ positivo temos que todo $\lambda \in (0; 0.6 + \epsilon)$ admite um único $y_\lambda \in (2\lambda - 1, \lambda)$ tal que, se X_λ é o correspondente valor de $x = x(\lambda, y)$ por (5.5), então $\int_0^1 \phi_2(\gamma_1(t)) + \int_0^\lambda \phi_2(\gamma_2(t)) = 0$. Ou equivalentemente, por (6.4) e (6.5):*

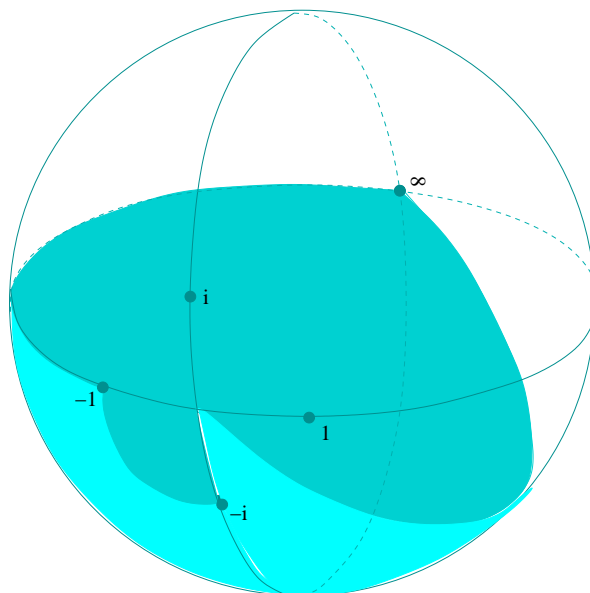
$$\int_0^1 \frac{(t + y_\lambda)dt}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 + X_\lambda t + 1)(t + \lambda)}} = \int_0^\lambda \frac{(t - y_\lambda)dt}{\sqrt{(1 - t^2)(t^2 - X_\lambda t + 1)(\lambda - t)}}.$$

Ainda em [RamosBatista1] prova-se que o problema de período não tem solução para $\lambda > 0.8$, portanto $\epsilon < 0.2$. Além disso, vale o seguinte resultado: Se ϵ_0 é o máximo valor de ϵ , então o problema de período não têm solução para todo $\lambda > 0.6 + \epsilon_0$. Em outras palavras, a família de superfícies de Costa triplamente periódicas é única no sentido que não há outros subintervalos de $(0, 1)$, exceto $(0; 0.6 + \epsilon_0)$, em que podemos encontrar tais superfícies. Vide [RamosBatista1] para detalhes.

Capítulo 7

Mergulho das Superfícies de Costa Triplamente Periódicas

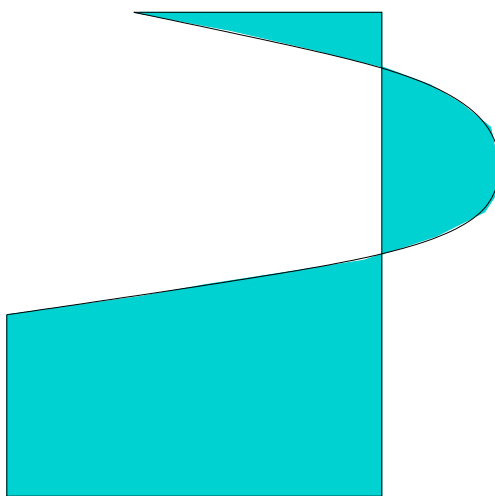
Este capítulo é fortemente baseado nas idéias usadas em [Karcher], pp. 60-62, onde o autor expõe uma demonstração para o mergulho da superfície de Costa em \mathbb{R}^3 . Recordemos que agora temos uma definição explícita de S (dada por g e dh em \bar{S} em (5.2)), e S está representada na Figura 5.1 com não outros períodos, mas somente os sugeridos pela figura. Nesta seção, o nosso trabalho é verificar se S é um mergulho em \mathbb{R}^3 . Como já definido antes, \bar{S} é o quociente de S por seu grupo de translações. A metade de \bar{S} é novamente reproduzida na Figura 7.1(a). A região hachurada indicada neste desenho representa o domínio fundamental da superfície, a saber $(x_1, x_2, x_3) = \Re \int \phi_{1,2,3} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im(z) > 0\}$.



Interpretação geométrica da imersão.

Por usarmos o fato de que g é uma aplicação aberta, que corresponde ao vetor normal unitário na superfície, é fácil verificar a consistência da Figura 7.2. Uma vez que $g(\mathcal{A})$ está contida na metade da esfera, existe uma direção em que a projeção ortogonal do domínio fundamental é uma imersão. No nosso caso temos infinitas direções, mas o mais conveniente é \vec{x}_2 . Portanto, $(x_1, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma imersão. Isto é o primeiro importante argumento para a demonstração do mergulho.

É claro, a função (x_1, x_3) também pode ser vista com domínio $\bar{\mathcal{A}}$, e este fato usaremos sempre que necessário. A projeção ortogonal de $g(\mathcal{A})$ no plano $x_2 = 0$ está representada na Figura 7.1(b). Queremos provar que a Figura 7.1(b) é consistente, a saber, que a imagem da curva $z(t) = t$, $\lambda < t < x$, pela imersão mínima está bem representada pela Figura 7.1(b).



Domínio Fundamental \mathcal{A} .

Iremos argumentar por que ela não tem intersecções com o eixo x_3 . Primeiramente, vejamos que $\mathcal{J} := (x_1, x_3)(\mathcal{A})$ implica $(x_1, x_3)^{-1}(\partial\mathcal{J}) \subset \partial\mathcal{A}$. De fato, tome $P \in \partial\mathcal{J}$ e uma seqüência $P_n \rightarrow P$ com $P_n \in \mathcal{J}$. Este último é um conjunto aberto, pois (x_1, x_3) é imersão. Temos uma correspondente seqüência $Q_n \in \mathcal{A}$ com ponto de acumulação em $Q \in \partial\mathcal{A}$, e por continuidade $(x_1, x_3)(Q) = P$.

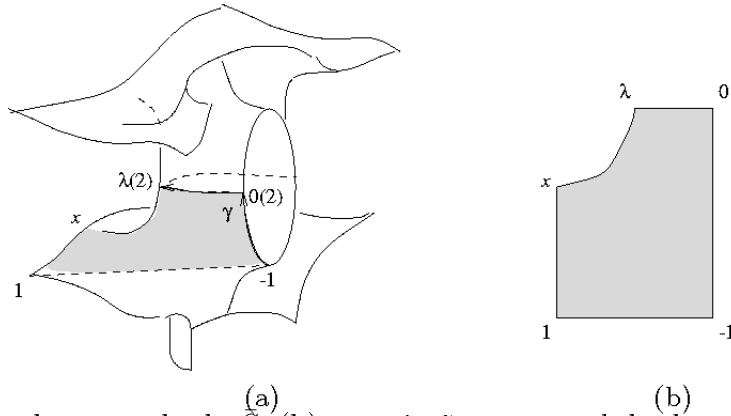


Figura 7.2: (a) A metade esquerda de \tilde{S} ; (b) a projeção ortogonal do domínio fundamental em $x_2 = 0$.

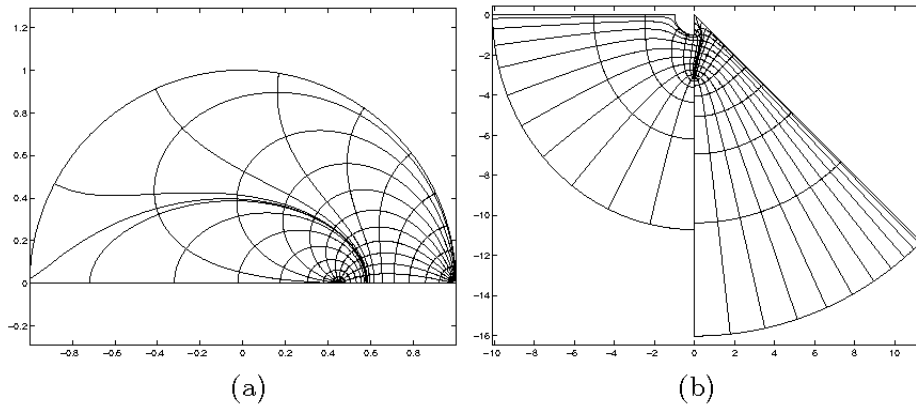


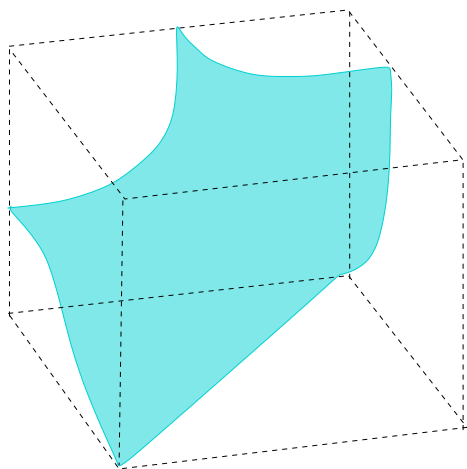
Figura 7.2: (a) O semi-círculo \mathcal{A} ; (b) a imagem correspondente $g(\mathcal{A})$.

Agora, a curva $(x_1, x_3)(\lambda, x)$ é convexa pois g varia monotonamente nela, e além disso a variação angular é de $\pi/2$, como pode-se verificar por (5.2), (5.9) e (5.10). Como \mathcal{A} é conexo e (x_1, x_3) é contínua, temos uma *única* componente conexa na imagem. Devido à compacidade de $\bar{\mathcal{A}}$, se a curva tivesse tangência ou cruzamento com Ox_3 , então $\partial\mathcal{J}$ admitiria um ponto P à direita de Ox_3 , e com abscissa máxima. Assim, $g(P)$ seria horizontal, mas isso contradiz o fato de que g varia $\pi/2$ monotonamente, de x a λ , com $g(x)$ vertical e $g(\lambda)$ horizontal. Este é o segundo importante argumento para a demonstração do mergulho.

Por um simples cálculo chegamos à conclusão de que as outras curvas do contorno de $(x_1, x_3)(\mathcal{A})$ são também monótonas e injetoras. Para isso, use o fato de que a tangente é rotação de $\pi/2$ da normal nas curvas planas, e o comportamento da g é dado por (5.2), (5.9) e (5.10). A curva-bordo da região representada pela Figura 7.1(b) é então $(x_1, x_3)(\partial\mathcal{A})$, simples fechada. Note que o trecho $(x_1, x_3)(\lambda, x)$ é gráfico, pois a tangente a ele só é vertical no extremo λ . Temos $(x_1, x_3)^{-1}(\partial\mathcal{J}) \subset \partial\mathcal{A}$, logo $(x_1, x_3)(\mathcal{A})$ preenche todo o interior de $(x_1, x_3)(\partial\mathcal{A})$. Se tivéssemos algum ponto de \mathcal{J} no exterior, então

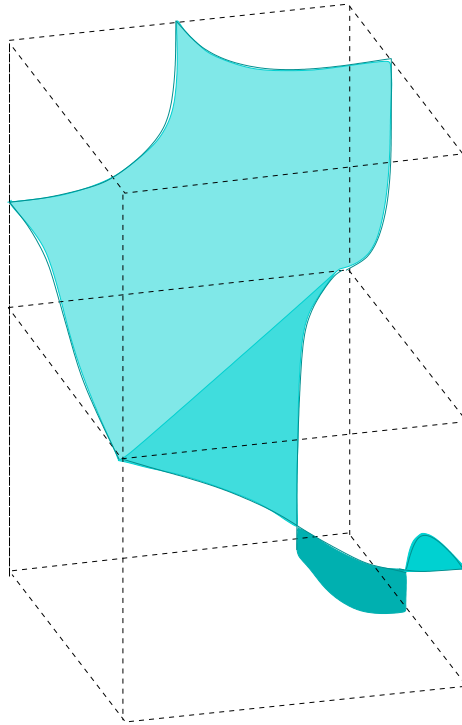
haveria $P \in \partial\mathcal{J}$ tal que $P \notin (x_1, x_3)(\partial\mathcal{A})$, o que é absurdo. Portanto vale a igualdade $(x_1, x_3)(\partial\mathcal{A}) = \partial\mathcal{J}$. Este é o terceiro argumento para a demonstração do mergulho.

Agora, o fato de que $(x_1, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}$ é uma imersão implica ser difeomorfismo local, e notemos que é também sobrejetor. Como $\bar{\mathcal{A}}$ é compacto e (x_1, x_3) é monótona injetora em $\partial\mathcal{A}$, com $(x_1, x_3)(\partial\mathcal{A}) = \partial\mathcal{J}$, então a pré-imagem de qualquer $P \in \mathcal{J}$ é um conjunto finito de pontos em \mathcal{A} . Segue-se que $(x_1, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}$ é uma aplicação de recobrimento. Os Teoremas de Jordan e Schönflies garantem que $(x_1, x_3)(\mathcal{A})$ é simplesmente conexo, donde $(x_1, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{J}$ é injetora. Finalmente, temos que $(x_1, x_2, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um gráfico.



$$(x_1, x_2, x_3) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Em particular, ela é um mergulho. É fácil ver que o domínio fundamental está no interior de um prisma em \mathbb{R}^3 . Junto com a rotação de 180° sobre o segmento de linha reta $(x_1, x_3)(\partial\mathcal{A} \setminus \mathbb{R})$, obtemos uma peça mergulhada da superfície que está de novo no interior de um prisma em \mathbb{R}^3 e cujo bordo, agora consistindo somente de curvas de simetria reflexional, está contida no bordo do prisma. Por sucessivas reflexões no bordo obtemos toda a superfície triplamente periódica sem alto-interseções. Em particular, $X : \bar{S} \rightarrow X(\bar{S})/\mathcal{G}$ é imersão (univalente) sem alto-interseções, onde \mathcal{G} é o grupo de translações da multivalente $X(\bar{S})$. Mas a imersão é própria pois \bar{S} é compacto, donde $X : \bar{S} \rightarrow X(\bar{S})/\mathcal{G}$ é recobrimento. Assim, $\pi_1(\bar{S}) < \pi_1(X(\bar{S}))$, e ambas têm gênero 5, devido a Riemann-Hurwitz para \bar{S} e argumentos topológicos para $X(\bar{S})$. Então $\pi_1(\bar{S}) = \pi_1(X(\bar{S}))$, donde ambas são homeomorfas. Isto é, X é mergulho.



$$X : \bar{S} \rightarrow X(\bar{S})/\mathcal{G}$$

Encerramos este trabalho comentando que a família de superfícies obtidas, contínua em λ , possui dois membros-limite: a superfícies de Callahan-Hoffman-Meeks de gênero 3 (vide [CallahanHoffmanMeeks]), e a superfície duplamente periódica de Scherk. Este resultado já se encontra suficientemente detalhado na Seção 10 de [RamosBatista2]. Por isso, incluí-lo na tese corresponderia a uma mera tradução ao Português, sem um detalhamento típico de tese de mestrado, cuja função é justamente tornar acessível artigo(s) científico(s) relevantes à área de pesquisa no qual se inserem.

Referências Bibliográficas

- [Ahlfors]- L.V. Ahlfors. Conformal Invariants: topics in geometric functions theory, New York, McGraw-Hill, 1973.
- [CallahanHoffmanMeeks]- Embedded minimal surfaces with an infinite number of ends, *Inventiones Mathematicae* **96**, 459–505 (1989)
- [Conway]- J.B. Conway. Functions of One Complex Variable, New York, Springer-Verlag, 1978.
- [Forster]- O. Forster. Lectures on Riemann Surfaces, New York, Springer-Verlag, 1977.
- [Gray]- A. Gray. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, Boca Raton, CRC, 1993.
- [Hicks]- J.N. Hicks. Notes on Differential Geometry, New York, Van Nostrand, 1965.
- [Karcher]- H. Karcher, Construction of minimal surfaces, *Surveys in Geometry*, University of Tokyo, 1989, 1-96, and Lectures Notes, SFB256 Bonn, 12, 1989.
- [Lima]- E.L. Lima. Espaços Métricos, Rio de Janeiro, IMPA, 1975.
- [Massey]- W.A. Massey. A Basic Course in Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Osserman]- R. Osserman. A Survey of Minimal Surfaces, New York, Van Nostrand, 1969.
- [RamosBatista1]- V. Ramos Batista, Theoretical evaluation of elliptic integrals based on computer graphics, Technical Report 71/02, 2002; home page http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2002/rp71-02.html.
- [RamosBatista2]- V. Ramos Batista, A Family of Triply Periodic Costa Surfaces, *Pacific Journal of Mathematics* **212**, 347–369 (2003)
- [Schoen]- R. Schoen. Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces. *Journal of Differential Geometry* **18**, 791–809 (1983)
- [Vick]- J.W. Vick. Homology Theory, New York, Academic Press, 1973.