

CMCC - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

ÁLGEBRA LINEAR

PROF. ROLDÃO DA ROCHA

É PERMITIDO O USO E A REPRODUÇÃO DESTAS NOTAS PARA FINS EXCLUSIVAMENTE EDUCACIONAIS.

$$\begin{array}{ccccc}
 U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) & \xrightarrow{\xi} & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) & \xrightarrow{\xi} & ((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \\
 \text{Id} \otimes \xi \downarrow & & & & \uparrow \xi \otimes \text{Id} \\
 U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) & \xrightarrow{\xi} & & & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X
 \end{array}$$

*Men wanted for hazardous journey. Low rages, bitter cold, long months of complete darkness,
isolation and starvation, constant danger, safe return doubtful.¹*

Ernest Shackleton

Recovery is overrated. What counts in a battle is what you do when the pain sets in.

¹Em 29 de dezembro de 1913, anúncio de um jornal britânico, convocando voluntários para viagem ao Pólo Sul. Mais de cinco mil inscritos, dentre os quais três mulheres.

Contents

1	Corpos e Espaços Vetoriais	2
1.1	Corpos: definições fundamentais	2
1.2	Os corpos $\mathbb{Z}_p$ (p primo)	3
1.3	Isomorfismo entre corpos	4
1.4	Outras estruturas algébricas	6
1.5	Espaços Vetoriais	7
1.5.1	Subespaços Vetoriais	8
1.5.2	Bases de um Espaço Vetorial	9
1.5.3	Transformações Lineares	11
1.5.4	Bandeiras	12
1.6	Espaço Dual e Funcionais Lineares	13
1.7	Núcleo e Imagem	17
1.8	Soma Direta	18
1.9	Espaços Quocientes	21
1.9.1	Teoremas de Isomorfismos	24
2	Operadores Lineares e Dualidade	27
2.1	Preliminares	27
2.2	Transformações Gradiente e Contragradiente	29
2.3	Funcionais Bilineares	29
2.3.1	Correlação	31
2.4	Dualidade e Adjunta	31
2.4.1	Aplicações Duais	32
3	Autovetores e Formas Bilineares	35
3.1	Aplicações Ortogonais, simétricas e anti-simétricas	41
3.2	Espaços Euclidianos e Hermitianos	44
4	Forma Canônica de Jordan	47
4.1	Forma Canônica de Jordan	47
4.2	Funções de Aplicações Lineares	57
5	Álgebra Tensorial	62
5.1	Aplicações Multilineares	62
5.2	Produto Tensorial entre Espaços Vetoriais	64

5.3	A álgebra tensorial de um espaço vetorial	70
5.4	Álgebra exterior	77
5.4.1	O produto exterior	77
5.4.2	Operações dentro da álgebra exterior	81
Bibliografia		84

1.1 Corpos: definições fundamentais

Um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto não-vazio dotado de duas operações binárias, denotadas por $+$ e $\cdot$, denominadas soma e produto, respectivamente, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. A operação de soma tem as seguintes propriedades:

- (a) Comutatividade: para todos $a, b \in \mathbb{K}$, $a + b = b + a$.
- (b) Associatividade: para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- (c) Elemento neutro: existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$, chamado de elemento nulo, ou zero, tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$.
- (d) Inversa: para cada $a \in \mathbb{K}$ existe um elemento denotado por b com a propriedade $a + b = 0$. Esse elemento é mais comumente denotado por $-a$.

2. A operação de produto tem as seguintes propriedades:

- (a) Comutatividade: para todos $a, b \in \mathbb{K}$ vale $a \cdot b = b \cdot a$.
- (b) Associatividade: para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (c) Elemento neutro: existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$, chamado de unidade, tal que $a \cdot 1 = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$.
- (d) Inversa: para cada $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, existe um elemento denotado por b^* com a propriedade $a \cdot b^* = 1$. Esse elemento é mais comumente denotado por a^{-1} .

3. Distributividade: o produto é distributivo em relação à adição: para todos $a, b, c \in \mathbb{K}$ vale $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Alguns autores consideram conveniente incluir também a hipótese de que o elemento neutro e o elemento nulo são distintos, $1 \neq 0$, pois de outra forma teríamos $\mathbb{K} = \{0\}$ (Prove!), uma situação trivial. Note-se que corpos são grupos comutativos em relação à operação de soma e monóides comutativos em relação à operação de produto.

► **Obs.1:** Um grupo é um conjunto não-vazio G munido de uma operação binária $G \times G \rightarrow G$, denominada produto, e de uma operação $G \rightarrow G$ ($g \mapsto g^{-1}$) (bijetora) denominada inversa, com as seguintes propriedades:

- 1) Associatividade: para todos $a, b, c \in G$ vale $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- 2) Elemento neutro: existe um elemento $e \in G$, denominado elemento neutro, tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$ para todo $g \in G$. ◀

A distributividade é a única propriedade listada acima que relaciona as operações de soma e produto. Os elementos de um corpo são comumente denominados escalares. Por motivos estruturais, é importante enfatizar que um corpo depende da definição do conjunto $\mathbb{K}$ e das operações binárias $+$ e $\cdot$ nele definidas, e muitas vezes nos referiremos a um corpo como sendo

uma tripla $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. É freqüente omitir-se o símbolo “ $\cdot$ ” de produto por escalares quando não houver confusão.

Em um corpo $\mathbb{K}$ sempre vale $a \cdot 0 = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$. De fato, como $0 = 0 + 0$, segue que $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Somando-se a ambos os lados o elemento inverso $(-a \cdot 0)$, teremos $a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$, ou seja, $0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$, como queríamos provar. Pela comutatividade do produto vale também $0 \cdot a = 0$ para todo $a \in \mathbb{K}$.

▷ **Ex.1:** Mostre que o elemento neutro da adição é único ◁

▷ **Ex.2:** Verifique que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são corpos em relação às operações usuais de soma e produto. O conjunto das matrizes $n \times n$ para qualquer $n \geq 2$ com o produto usual de matrizes é um corpo? Mostre que $\mathbb{R}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ não é um corpo. Mostre que $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_6$ não são corpos. ◁

▷ **Ex.3:** Quais são os elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{10}$ com respeito à adição e à multiplicação induzidas? ◁

1.2 Os corpos $\mathbb{Z}_p$ (p primo)

Uma relação de equivalência R em um conjunto X é uma relação (i) reflexiva, (ii) simétrica e (iii) transitiva, ou seja, (i) xRx , (ii) se xRy então yRx , e (iii) se xRy e yRz então xRz , $\forall x, y, z \in X$. O conjunto de todos os elementos equivalentes a x constituem a classe de equivalência de x , denotada por $[x] = \{y \in X \mid yRx\}$. O conjunto dessas classes de equivalência é denotado por $\mathcal{X} = X/R = \{[x] \mid x \in X\}$, e denominado *espaço quociente*. Uma notação muito utilizada para xRy é $x \sim y$. Um elemento $x \in [x]$ ou qualquer outro elemento em $[x]$ é denominado *representante* de $[x]$.

Tais classes de equivalência são disjuntas, no sentido de que $[x] \cap [y] = \emptyset$. Mostraremos que, se $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, então $[x] = [y]$. Supondo então que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existe $c \in [x] \cap [y]$ tal que $c \sim x$ e $c \sim y$. Por transitividade, $x \sim y$. Agora mostraremos que $[x] \subset [y]$, tomando um elemento arbitrário $x_1 \in [x]$ temos que $x_1 \sim x$, e como $x \sim y$, então $y \sim x_1$, isto é, $x_1 \in [y]$, e portanto, $[x] \subset [y]$. Analogamente podemos mostrar que $[y] \subset [x]$, e portanto $[x] = [y]$.

▷ **Exemplo 1:** Para $n \in \mathbb{N}$, no conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ podemos definir a seguinte relação de equivalência: $a \sim b \Leftrightarrow a - b = kn$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ou seja, os inteiros a e b são considerados equivalentes se diferirem por um múltiplo de n . A classe de equivalência de a consiste portanto no conjunto

$$[a] = \{c \in \mathbb{Z} \mid a = c + kn\} = \{c, c \pm n, c \pm 2n, c \pm 3n, \dots\}.$$

O conjunto das classes de equivalência é o conjunto $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\sim$, o conjunto dos inteiros módulo n . Lembramos que, se $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a é congruente a b módulo n — e denotamos $a \equiv b \pmod{n}$ — se $n \mid (a - b)$. Podemos ainda mostrar que nesse caso, $a \equiv b \pmod{n}$ se, e somente se existir um inteiro k tal que $a = b + km$.

Portanto definimos o conjunto das classes de equivalência a partir da relação $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n}$. ◁

▷ **Ex.4:** Prove que $a \sim b$ definida por $a \equiv b \pmod{n}$ é uma relação de equivalência. ◁

▷ **Ex.5:** Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, defina a relação R em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ por $(a, b)R(c, d)$ se, e somente se $ad = cb$. Mostre que R é uma relação de equivalência. ◁

Denotamos também o conjunto $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$, com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, com a soma definida por $[a] \dot{+} [b] \equiv (a+b) \pmod{n} = [a+b]$, para $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$. Podemos também considerar em $\mathbb{Z}_n$ uma operação de produto, definida por $[a] \bullet [b] \equiv ab \pmod{n} = [a.b]$.

► **Teorema 1:** Se o conjunto $\mathbb{Z}_n$ é um corpo com as operações acima definidas, então n é um número primo. ◀

Demonstração: As operações de soma e produto definidas acima são comutativas, associativas e distributivas (justifique!). Sempre vale que $[-a] = [n-a]$, $\forall [a] \in \mathbb{Z}_n$, o que implica na existência de um inverso aditivo. Resta-nos estudar a existência de elementos inversos $[a]^{-1}$. Vamos supor que $\mathbb{Z}_n$ seja um corpo. Então $[a] \in \{[2], \dots, [n-1]\}$ tem uma inversa em $\mathbb{Z}_n$, ou seja, um número $[b] \in \{[1], \dots, [n-1]\}$ tal que $[a] \bullet [b] = 1$. Lembrando a definição de produto em $\mathbb{Z}_n$, isso significa que existe um inteiro k tal que $ab = kn + 1$. Mas isso implica $b - \frac{1}{a} = k\frac{n}{a}$. Como o lado esquerdo não é um número inteiro, o lado direito também não pode ser. Portanto n/a não pode ser inteiro para nenhum $a \in \{2, \dots, n-1\}$, ou seja, n não tem divisores é portanto é um número primo. ■

Os conjuntos $\mathbb{Z}_n$ têm profundas aplicações em teoria de códigos e relevante também em outras áreas de Álgebra e Geometria.

▷ **Exemplo 2:** Tome por exemplo $n = 7$. Neste caso, $[4] \dot{+} [6] = [10] = [3]$, enquanto que $[6] \bullet [6] = [6.6] = [36] = [1]$. A tabela de multiplicação para $\mathbb{Z}_7$ é dada por

$\dot{+}$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[6]	[6]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]

$\bullet$	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
[2]	[0]	[2]	[4]	[6]	[1]	[3]	[5]
[3]	[0]	[3]	[6]	[2]	[5]	[1]	[4]
[4]	[0]	[4]	[1]	[5]	[2]	[6]	[3]
[5]	[0]	[5]	[3]	[1]	[6]	[4]	[2]
[6]	[0]	[6]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Os valores de $[a] \dot{+} [b]$ e $[a] \bullet [b]$ para $\mathbb{Z}_7$ são exibidos na intersecção da $[a]$ -ésima linha $[b]$ -ésima coluna, na tabela apropriada. ◀

▷ **Ex.6:** Faça a tabela multiplicativa de $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$ e $\mathbb{Z}_9$, identificando quais são os respectivos elementos inversíveis de tais conjuntos ◀

► **Proposição 1:** As operações $\oplus$ e $\bullet$ estão bem definidas em $\mathbb{Z}_n$ ◀

Prova: Suponha que $[a] = [c]$ e $[b] = [d]$ em $\mathbb{Z}_n$. Então $a = c + un$ e $b = d + vn$, para $u, v \in \mathbb{Z}$ apropriados. Assim,

$$\begin{aligned}
 [a+b] &= [c+un+d+vn] = [c+d+(u+v)n] = [c+d] + [(u+v)n] = [c+d] + [0] = [c+d] \\
 [a.b] &= [(c+un).(d+vn)] = [c.d + (c.v + u.d + u.n.v).n] = [c.d]
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

1.3 Isomorfismo entre corpos

Dois corpos $(\mathbb{K}_1, \dot{+}, \circ)$ e $(\mathbb{K}_2, +, \cdot)$ são ditos *isomorfos* se existir uma aplicação bijetora $\phi : \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2$ que preserve as operações algébricas de $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$, ou seja, tal que $\phi(a \dot{+} b) = \phi(a) + \phi(b)$,

$\phi(a \circ b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$. Podemos provar que $\phi(1_{\mathbb{K}_1}) = 1_{\mathbb{K}_2}$ e $\phi(0_{\mathbb{K}_1}) = 0_{\mathbb{K}_2}$. Acima, $1_{\mathbb{K}_j}$ e $0_{\mathbb{K}_j}$ são a unidade multiplicativa e o elemento nulo, respectivamente, de $\mathbb{K}_j$, $j = 1, 2$.

▷ **Ex.7:** Prove que $\phi(-a) = -\phi(a)$ para todo $a \in \mathbb{K}_1$ e que $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$ para todo $a \in \mathbb{K}_1$, $a \neq 0_{\mathbb{K}_1}$ ◁

▷ **Ex.8:** Considere o conjunto de todas as matrizes reais da forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Mostre que esse conjunto é um corpo em relação às operações usuais de soma e produto de matrizes. Mostre que esse corpo é isomorfo ao corpo $\mathbb{C}$, através da aplicação

$$\begin{aligned} \Theta : \mathbb{C} &\rightarrow M(2, \mathbb{R}) \\ (a + ib) &\mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

◁

Considere agora um corpo $\mathbb{K}$ com unidade. Para um número natural n , definimos $n.1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ vezes}}$. Define-se a *característica* de $\mathbb{K}$ — e denotamos por $\text{char}(\mathbb{K})$ — como sendo o menor número natural não-nulo n tal que $n.1 = 0$. Se um tal número não existir, dizemos que o corpo tem característica zero.

▷ **Ex.9:** Prove que $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ têm característica zero, e prove que $\mathbb{Z}_p$, com p primo, tem característica p ◁

▷ **Ex.10:** Prove que, quando $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 0$, então $\text{char}(\mathbb{K})$ é sempre um número primo ◁

▷ **Ex.11:** Prove que, quando $\text{char}(\mathbb{K}) = p$, então $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $(a + b)^p = a^p + b^p$. ◁

▷ **Ex.12:** : Sejam $a, b \in \mathbb{K}$. Quais das seguintes relações plausíveis são necessariamente verdadeiras? Prove ou justifique.

1. $0.a = 0$
2. $(-1).a = -a$
3. $(-a).(-b) = a.b$
4. $1 + 1 \neq 0$
5. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ então $ab \neq 0$

◁

▷ **Ex.13:** Dado um isomorfismo de corpos $\phi : (\mathbb{K}_1, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{K}_2, +, \cdot)$, mostre que

1. $\phi(0_{\mathbb{K}_1}) = 0_{\mathbb{K}_2}$
2. Se $1_{\mathbb{K}_1}$ denota a identidade de $\mathbb{K}_1$, então a identidade em $\mathbb{K}_2$ é dada por $\phi(1_{\mathbb{K}_1})$.
3. $\phi(a^n) = (\phi(a))^n$
4. $\phi^{-1} : \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_1$ existe e também é isomorfismo.

5. Se $(\mathbb{K}_3, \boxplus, \boxminus)$ é um corpo, e se $\psi : (\mathbb{K}_2, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{K}_3, \boxplus, \boxminus)$ é isomorfismo, então $\psi \circ \phi : (\mathbb{K}_1, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{K}_3, \boxplus, \boxminus)$ é também um isomorfismo

◁

1.4 Outras estruturas algébricas

Considere elementos a, b, c em um conjunto S , e as seguintes propriedades:

A1) $a + b = b + a$

A2) $(a + b) + c = a + (b + c)$

A3) $\exists z \in S$ tal que $z + a = a + z = a$

A4) para cada $a \in S$, $\exists a^* \in S$ tal que $a + a^* = a^* + a = z$

M1) $a.b = b.a$

M2) $(a.b).c = a.(b.c)$

M3) $\exists e \in S$ tal que $e.a = a.e = a$

M4) para cada $a \in S$ tal que $a \neq z$, $\exists a' \in S$ tal que $a.a' = a'.a = e$

D) $a.(b + c) = a.b + a.c$ e $(a + b).c = a.c + b.c$

Z) Se $a.b = z$ então $a = z$ ou $b = z$ (ou ambos).

Usamos as palavras *zero* e *identidade* para descrever os elementos z e e respectivamente. Qualquer elemento $a \in S$ (incluindo $a = z$) para o qual existe $b \neq 0$ tal que $a.b = z$ ou $b.a = z$ é chamado de *divisor de zero*. Substituímos as notações $0, 1, -a, a^{-1}$ respectivamente por z, e, a^*, a' para evitarmos atribuir inconscientemente algumas propriedades que decorrem das definições, mas não são axiomas e devem ser provadas. A seguinte tabela ilustra as diversas estruturas algébricas advindas do conjunto S equipado com as operações binárias $+$ e $\cdot$:

A1	A2	A3	A4	M2	D	M1	M3	M4	Z	$\langle S, +, \cdot \rangle$
•	•	•	•	•	•	—	—	—	—	anel
•	•	•	•	•	•	•	—	—	—	anel comutativo
•	•	•	•	•	•	—	•	—	—	anel unital
•	•	•	•	•	•	—	—	—	•	anel sem divisores de zero
•	•	•	•	•	•	•	•	—	—	anel comutativo unital
•	•	•	•	•	•	•	—	—	•	anel comutativo sem divisores de zero
•	•	•	•	•	•	—	•	—	•	anel unital sem divisores de zero
•	•	•	•	•	•	•	•	—	•	anel de integridade
•	•	•	•	•	•	—	•	•	•	anel de divisão
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	corpo

Um exemplo de anel bastante utilizado é o anel dos polinômios.

▷ **Ex.14:** Prove que as propriedades M4 e Z não são satisfeitas para $\mathbb{Z}_n$ quando n é um inteiro composto. Prove que todas as outras propriedades são satisfeitas ◁

► **Teorema 2:** *Seja p um inteiro positivo primo. Então $\mathbb{Z}_p$ satisfaz as propriedades M4 e Z*
◄

Prova: a) Suponha que $[a] \in \mathbb{Z}_p$, onde $[a] \neq [0]$. Então $p \nmid a$ em $\mathbb{Z}$, e portanto $(p, a)=1$. Portanto, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $rp + sa = 1$. Então $[1]=[rp + sa] = [sa] = [s] \bullet [a]$. Logo $[s] \bullet [a] = [a] \bullet [s] = 1$, e $\mathbb{Z}_p$ satisfaz M4.

b) Agora suponha que $[b], [c] \in \mathbb{Z}_p$ tais que $[b] \bullet [c] = 0$. Ou $[b] = [0]$ e não há mais nada a se provar, ou $[b] \neq [0]$. Pela parte a) da prova, então existe $[t] \in \mathbb{Z}_p$ tal que $[t] \bullet [b] = [1]$. Então, $[0] = [t] \bullet [0] = [t] \bullet ([b] \bullet [c]) = ([t] \bullet [b]) \bullet [c] = [1] \bullet [c] = [c]$. Portanto quando assumimos que $[b] \bullet [c] = [0]$ concluímos ou que $[b] = [0]$ ou que $[c] = [0]$, e portanto a propriedade Z é satisfeita para $\mathbb{Z}_p$ ■

1.5 Espaços Vetoriais

Um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto de elementos chamados vetores, munido de uma operação aditiva $+$: $V \times V \rightarrow V$, denominada soma vetorial, e também de um produto por escalares $\cdot$: $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ com as seguintes propriedades:

1) A cada par $u, v \in V$ de vetores, é associado um elemento $u + v \in V$, denominado soma de u e v , com as seguintes propriedades:

- (a) A soma é comutativa: $u + v = v + u$ para todos $u, v \in V$
- (b) A soma é associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$ para todos $u, v, w \in V$
- (c) Existe um vetor denotado por 0 , denominado vetor nulo, tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$
- (d) A cada $u \in V$ existe associado um único vetor denotado por $-u$ tal que $u + (-u) = 0$

2) A cada par $a \in \mathbb{K}$, $u \in V$ existe associado um vetor denotado por $a.u \in V$, denominado produto de u por a , de forma que

- (a) O produto por escalares é associativo: $a.(b.u) = (ab).u$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$ e $u \in V$, onde ab é o produto de a por b em $\mathbb{K}$.
- (b) $1.u = u$ para todo $u \in V$, onde 1 denota a unidade de $\mathbb{K}$.
- (c) O produto por escalares é distributivo em relação à soma de vetores: $a.(u + v) = a.u + a.v$, para todo $a \in \mathbb{K}$ e todos $u, v \in V$.
- (d) O produto por escalares é distributivo em relação à soma de escalares: $(a + b).u = a.u + b.u$, para todos $a, b \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$.

▷ **Ex.15:** Prove que os espaços vetoriais são grupos comutativos em relação à operação de soma ◁

Os elementos de um corpo sobre os quais um espaço vetorial se constitui são freqüentemente denominados escalares. Usamos o símbolo “+” tanto para a operação de adição do corpo $\mathbb{K}$ quanto para a operação de adição do espaço vetorial V , ainda que se trate de operações distintas. Igualmente usamos o mesmo símbolo “0” para designar o vetor nulo de V e o elemento nulo de $\mathbb{K}$.

▷ **Ex.16:** Mostre que, usando os postulados acima, que $0.u = 0$ para todo $u \in V$, onde, o 0 do lado esquerdo representa o zero do corpo $\mathbb{K}$ e o do lado direito o vetor nulo de V . Em seguida, prove que para todo $a \in \mathbb{K}$ e todo $u \in V$ vale $(-a).u = -(a.u)$, sendo que $-a$ denota a inversa aditiva de a em $\mathbb{K}$ e $-(a.u)$ denota a inversa aditiva de $a.u \in V$ ◁

▷ **Ex.17:** Prove que:

1. Se $\mathbb{K}$ é um corpo, então $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as mesmas operações de soma e produto definidas em $\mathbb{K}$.
2. Se $\mathbb{K}$ é um corpo e $\mathbb{L}$ é um subcorpo de $\mathbb{K}$ (ou seja, um subconjunto de $\mathbb{K}$ que é por si só um corpo com as operações definidas em $\mathbb{K}$), então $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{L}$.
3. Se $\mathbb{K}$ é um corpo, o produto Cartesiano $\mathbb{K}^n = \{(k_1, \dots, k_n), k_j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, n\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com a operação de soma definida por $(k_1, \dots, k_n) + (l_1, \dots, l_n) = (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n)$ e o produto por escalares por $a.(k_1, \dots, k_n) = (ak_1, \dots, ak_n)$ para todo $a \in \mathbb{K}$. O vetor nulo é o vetor $(0, \dots, 0)$.
4. O conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{K})$, de todas as matrizes $m \times n$ cujos elementos de matriz pertencem a $\mathbb{K}$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com a soma sendo a soma usual de matrizes e o produto por escalares sendo o produto usual de matrizes por números escalares. O vetor nulo é a matriz nula ◀

◀

▷ **Ex.18:** Determine se os seguintes conjuntos são espaços vetoriais:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, com soma usual, e multiplicação definida por $a \bullet v = a^2 v$, $\forall v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$.
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, com soma usual, e multiplicação definida por $a \bullet v = (\operatorname{Re} a) v$, $\forall v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$
3. O conjunto de todas as funções pares.
4. O conjunto de todas as funções ímpares.

◀

▷ **Ex.19:** Considere o conjunto $\mathbb{R}$ com a operação de soma usual, um corpo $\mathbb{Z}_p$, com p primo e o produto $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}_p$ e $x \in \mathbb{R}$ dada pelo produto usual em $\mathbb{R}$. Essa estrutura define um espaço vetorial? Justifique ◀

1.5.1 Subespaços Vetoriais

Um subconjunto $U \neq \emptyset$ de um espaço vetorial V é dito ser um subespaço vetorial de V se e somente se, dados $a, b \in \mathbb{K}$ e $u, v \in U$, $au + bv \in U$. Subespaços são nesse sentido fechados com relação a combinações lineares. Adicionalmente, o conjunto $\{0\}$ é elemento de todo subespaço de V . De fato, se U é subespaço vetorial de V , então se w é um elemento arbitrário de U , então $0.w \in U$, e já que $0.w = 0$, então $0 \in U$ para todo $U \subset V$.

▷ **Ex.20:** Considere $V = \mathbb{C}^3$ e os seguintes conjuntos $U \subseteq V$ consistindo dos vetores (a, b, c) , onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

1. $a = 0$
2. $b = 0$
3. $a + b = 1$

4. $a + b = 0$

5. $a + b \geq 0$

6. $a \in \mathbb{R}$

Em quais desses casos U é subespaço vetorial de V ? $\triangleleft$

▷ **Ex.21:** Considere V como sendo o espaço vetorial complexo dos polinômios de grau n e $U \subseteq V$ consistindo dos polinômios $p(t)$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ tais que:

1. possuem grau três

2. $2p(0) = p(1)$

3. $p(t) \geq 0$ sempre que $0 \leq t \leq 1$

4. $p(t) = p(1 - t), \forall t \in \mathbb{K}$

Em quais desses casos U é subespaço vetorial de V ? $\triangleleft$

▷ **Ex.22:** Em um corpo finito $\mathbb{Z}_p$, p primo, calcule o número de subespaços vetoriais de dimensão j em um $\mathbb{Z}_p$ -espaço vetorial $(\mathbb{Z}_p)^n$ $\triangleleft$

▷ **Ex.23:** Prove que a intersecção de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial $\triangleleft$

▷ **Ex.24:** Prove que os únicos subespaços de $\mathbb{R}$, são o próprio $\mathbb{R}$ e o subespaço nulo. Mostre que todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são o próprio $\mathbb{R}^2$, o subespaço nulo ou o subespaço consistindo de um múltiplo de um vetor fixo em $\mathbb{R}^2$. $\triangleleft$

1.5.2 Bases de um Espaço Vetorial

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto finito $v_1, \dots, v_n \in V$ de vetores é dito ser linearmente dependente se existir um conjunto de escalares $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, nem todos nulos, tais que $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$. Um conjunto arbitrário de vetores é dito ser linearmente independente se não possuir nenhum subconjunto finito que seja linearmente dependente.

Para um conjunto finito de vetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e de escalares $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{K}$, uma expressão como $a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ é dita ser uma combinação linear dos vetores v_i .

Considerando agora um conjunto de vetores $U \subseteq V$, o espaço gerado por U (“linear span”) de U denotado por $\text{span}_{\text{lin}}(U)$, ou $\langle U \rangle$, é o conjunto de todos os vetores de V que podem ser escritos como uma combinação linear finita de elementos de U .

Denotando um conjunto arbitrário não-vazio de índices por J , uma base em um espaço vetorial V é um conjunto $A = \{v_i, i \in J\}$ de vetores linearmente independentes que geram V (qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito de modo único como uma combinação linear de elementos de A). Um espaço vetorial é dito ser de dimensão finita se possuir uma base finita. Se um espaço vetorial V tem dimensão finita, sua dimensão é definida como sendo o número de elementos de sua base.

▷ **Ex.25:** Dois conjuntos disjuntos de $\mathbb{R}^2$ podem gerar o mesmo espaço vetorial? Qual é em $\mathbb{R}^3$ o espaço gerado pelo conjunto $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$? $\triangleleft$

▷ **Exemplo 3:** $V = \mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{C}$ e $V = \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$ são ambos espaços vetoriais de dimensão finita n , enquanto que $V = \mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ é espaço vetorial de dimensão finita $2n$. Isso mostra a dependência da dimensão com o corpo utilizado. Esse conceito será bastante utilizado quando falarmos de produto tensorial ◁

▷ **Exemplo 4:** Os polinômios de uma variável real com coeficientes complexos $P_n(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$, $t \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{C}$, é polinômio de grau n quando $a_n \neq 0$ ◁

▷ **Exemplo 5:** $V = \mathbb{R}$ sobre o corpo dos reais. O conjunto dos reais sobre o corpo dos reais é um espaço vetorial de dimensão 1, pois qualquer elemento $v \in \mathbb{R}$ pode ser escrito como $v = v \cdot 1$, onde $\{1\}$ é o único elemento da base de $\mathbb{R}$. Ao considerarmos $V = \mathbb{R}$ sobre o corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais, tal espaço vetorial não possui dimensão finita, pois não existe um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_m\}$ de números reais tais que todo $x \in \mathbb{R}$ possa ser escrito como $x = q_1 x_1 + \cdots + q_m x_m$, onde $q_i \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é um conjunto contável, a coleção de números que podem ser escritos como o lado direito é uma coleção contável e tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{Q}^m$, porém o conjunto $\mathbb{R}$ não é contável ◁

► **Teorema 3:** Se em um espaço vetorial V existir um conjunto $\{v_i\}$ de n vetores linearmente independentes, então a dimensão de V é maior ou igual a n ◀

Prova: Suponhamos por absurdo que exista uma base $B = \{u_1, \dots, u_k\}$ em V com $k < n$. Então podemos escrever $v_1 = a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$ pois B é uma base e pelo menos $a_k \neq 0$, portanto

$$u_k = (a_k)^{-1}(v_1 - a_1 u_1 - \cdots - a_{k-1} u_{k-1}) \quad (1.3)$$

Analogamente temos que $v_2 = b_1 u_1 + \cdots + b_k u_k$ e usando a Eq.(1.3) escrevemos $v_2 = c_1 u_1 + \cdots + c_{k-1} u_{k-1} + d_1 v_1$. Os c_i não podem ser todos nulos, senão $v_2 = d_1 v_1$, contrariando a hipótese de que os $\{v_i\}$ são L.I.. Suponhamos que c_{k-1} seja o elemento não-nulo, podemos escrever u_{k-1} como uma combinação linear envolvendo $\{u_1, \dots, u_{k-2}\}$ e os vetores v_1 e v_2 . Após k passos provamos que $v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, contrariando a hipótese de que os v_i são L.I.. ■

▷ **Ex.26:** Se $\mathbb{K}$ é um corpo com p elementos, quantas bases existem em $\mathbb{K}^n$? ◁

Vimos que o espaço V tem dimensão finita se ele possui uma base finita. Duas bases quaisquer de V têm o mesmo número (finito) de elementos.

▷ **Ex.27:** Prove as seguintes afirmações: a) O conjunto de vetores $\{e_1, \dots, e_n\}$ é L.D. se e somente se pelo menos um dos vetores e_j for combinação linear dos outros.

b) Se o conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ é L.I. e o conjunto $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ é L.D., então e_{n+1} é combinação linear de $e_1, \dots, e_n$ ◁

▷ **Ex.28:** Considere $\mathbb{K}_{n-1}[x]$ o espaço dos polinômios na variável x que têm grau menor ou igual a $n-1$, com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$. Verifique que:

a) O conjunto $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ forma uma base de $\mathbb{K}_{n-1}[x]$, e as coordenadas de um polinômio $f \in \mathbb{K}_{n-1}[x]$ em tal base são seus coeficientes.

b) O conjunto $\{1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^{n-1}\}$ forma uma base de $\mathbb{K}_{n-1}[x]$. Se $\text{char}(\mathbb{K}) = p > n$, então os coeficientes de um polinômio f são $\{f(a), f'(a), \dots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\}$.

c) Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ elementos distintos dois a dois. Seja $g_i(x) = \prod_{j \neq i} (x-a_j)(a_i-a_j)^{-1}$. Os polinômios $g_1(x), \dots, g_n(x)$ formam uma base de $\mathbb{K}_{n-1}[x]$ — denominada base de interpolação — e as coordenadas do polinômio f nessa base é $\{f(a_1), \dots, f(a_n)\}$ ◁

► **Obs.2:** Dado $U = \{e_1, \dots, e_n\}$ um conjunto finito de vetores em V , e $W = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_m}\}$ um conjunto L.I. de U , dizemos que W é *maximal* se cada elemento de U puder ser escrito como uma combinação linear dos elementos de W ◄

► **Proposição 2:** Qualquer conjunto $\{e_1, \dots, e_n\} \subset S$ maximal L.I. é uma base do espaço gerado $\langle S \rangle$ de S ◄

Prova: Mostraremos que qualquer vetor em $\langle S \rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de $e_1, e_2, \dots, e_k$. Por definição, qualquer vetor em $\langle S \rangle$ pode ser expresso como uma combinação linear de vetores em S . Qualquer vetor $v \in S$ pode ser expresso com uma combinação linear de $e_1, e_2, \dots, e_k$. Para $v \in \{e_1, \dots, e_n\} \subset S$, isso é óbvio. Para $v \notin \{e_1, \dots, e_n\}$, sabemos que um vetor v pode ser expresso como qualquer combinação linear de $e_1, \dots, e_n$ se, e somente se $v, e_1, \dots, e_n$ são L.D.. Portanto segue o enunciado ■

Aplicando as considerações do Lema anterior a $S = V$, obtemos o

► **Teorema 4:** Qualquer conjunto de vetores L.I. em V pode ser completado a uma base ◄

Em particular, qualquer $0 \neq v \in V$ está contido em alguma base de V , e qualquer conjunto de n vetores L.I. em um espaço vetorial V n -dimensional forma uma base de V .

► **Teorema 5:** Qualquer subespaço vetorial U de um espaço vetorial de dimensão finita V também possui dimensão finita, e $\dim U \leq \dim V$. Além disso, se $U \neq V$, então $\dim U < \dim V$ ◄

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_k\}$ um sistema maximal de vetores L.I. em U . $\{e_1, \dots, e_k\}$ é uma base de U e $\dim U = k$. O conjunto L.I. $\{e_1, \dots, e_k\}$ pode ser completado a uma base de V , e se $U \neq V$, então $\dim V > k$ ■

▷ **Ex.29:** Dados U, W subespaços vetoriais de V , para quais espaços vetoriais V temos válida a propriedade $V \cap (U + W) = V \cap U + V \cap W$? ◄

▷ **Ex.30:** Prove que se U é um subespaço de V e $\dim U = \dim V < \infty$, então $U = V$ ◄

1.5.3 Transformações Lineares

Considere U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um mapa $\phi : U \rightarrow V$ é dito ser *linear* se $\forall u, v \in U, a \in \mathbb{K}$, tivermos $\phi(au) = a\phi(u)$ e $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$. Uma aplicação linear é um homomorfismo de grupos aditivos. Com efeito, $\phi(\mathbf{0}) = \phi(0\mathbf{0}) = 0\phi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $\phi(-u) = \phi((-1).u) = -\phi(u)$. Denotamos por $\text{Hom}(U, V)$ o conjunto dos homomorfismos entre U e V .

▷ **Ex.31:** Mostre que os mapas de homotetia $f : V \rightarrow V$, definidos por $f(u) = a.u, \forall a \in \mathbb{K}, u \in V$, são transformações lineares ◄

Dizemos que dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais U, V são *isomorfos* se o homomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ for uma aplicação bijetiva. A aplicação ϕ é denominada isomorfismo entre U e V .

► **Proposição 3:** Sejam U, V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, e considere $\{e_1, \dots, e_n\} \subset U$ e $\{h_1, \dots, h_n\} \subset V$ dois conjuntos de vetores com o mesmo número de elementos. Então, se $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ coincide com U , existe somente uma aplicação $\psi : U \rightarrow V$ tal que $\psi(e_i) = h_i$, para todo i entre 1 e n . Além disso, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ for L.I. — e neste caso $\{e_1, \dots, e_n\}$ forma uma base de U — então a aplicação ψ existe, e é um isomorfismo ◄

Prova: Sejam ψ e ψ' dois mapas tais que $\psi(e_i) = \psi'(e_i) = h_i$. Considere o mapa $\phi = \psi - \psi'$, onde $(\psi - \psi')(e_i) = \psi(e_i) - \psi'(e_i)$. Verifique que $\phi : U \rightarrow V$ é linear, e dado $u = a_1e_1 + \dots + a_ne_n \in U$, temos que $\phi(u) = 0$. Portanto $\psi(u) = \psi'(u), \forall u \in U$, logo $\psi = \psi'$. Agora, já que cada elemento de $u \in U$ pode ser unicamente representado na forma $u = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$, definimos $\psi : U \rightarrow V$ por $\psi(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = b_1h_1 + \dots + b_nh_n$. Prove que tal aplicação é linear ■

▷ **Ex.32:** Mostre que o conjunto $\text{Hom}(U, V)$ é um espaço vetorial ◁

▷ **Exemplo 6:** Seja $\xi \in \text{Hom}(U, V)$ um mapa bijetivo, e portanto existe $\xi^{-1} : V \rightarrow U$. Mostraremos que ξ^{-1} é linear. Já que ξ é bijetiva, existem vetores — unicamente definidos — $u_1, u_2 \in U$ tais que $V \ni v_i = \xi(u_i)$. Das expressões $\xi(u_1 + u_2) = \xi(u_1) + \xi(u_2)$ e $\xi(au_1) = a\xi(u_1)$, aplicamos ξ^{-1} em ambos os lados dessas duas expressões, e portanto $u_1 + u_2 = \xi^{-1}(\xi(u_1) + \xi(u_2))$ e $au_1 = \xi^{-1}(a\xi(u_1))$. Portanto, $\xi^{-1}(v_1) + \xi^{-1}(v_2) = \xi^{-1}(v_1 + v_2)$ e $a\xi^{-1}(v_1) = \xi^{-1}(av_1)$ ◁

▷ **Ex.33:** Mostre que se ϕ é uma aplicação linear, então ϕ^n ($\forall n \in \mathbb{N}$) também é linear ◁

► **Proposição 4:** Qualquer $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V n -dimensional é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ ◀

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V . Considere o mapa $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ que associa a cada vetor $v \in V$, a n -upla $(a_1, \dots, a_n)$ de coordenadas do vetor v na base $\{e_i\}$. Tal mapa é bijetivo. Agora, se $v = a_1e_1 + \dots + a_ne_n$, e $u = b_1e_1 + \dots + b_ne_n$, então

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n \\ \lambda v &= (\lambda a_1)e_1 + \dots + (\lambda a_n)e_n \end{aligned}$$

Portanto ϕ é isomorfismo ■

► **Teorema 6:** Dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais U, V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se eles possuem a mesma dimensão ◀

Prova: O isomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ leva a base de U na base de V , e portanto $\dim U = \dim V$. Reciprocamente, considere $\dim U = \dim V$. Considere $\{e_1, \dots, e_n\} \subset U$ e $\{h_1, \dots, h_n\} \subset V$ respectivamente bases de U e V . A expressão $\phi(a_1e_1 + \dots + a_ne_n) = b_1h_1 + \dots + b_nh_n$ define uma aplicação linear de U em V , de acordo com o Lema. Além disso ϕ é bijetiva, pois $a_1e_1 + \dots + a_ne_n = \phi^{-1}(b_1h_1 + \dots + b_nh_n)$ ■

► **Obs.3:** Na demonstração acima tomamos o isomorfismo $\phi : U \rightarrow V$, e se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de U , então $\{\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)\}$ é base de V , portanto $\dim U = \dim V$. Reciprocamente, provamos no Teorema acima que qualquer $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V n -dimensional é isomorfo a $\mathbb{K}^n$, e portanto esses espaços também são isomorfos entre si, por relação de equivalência ◀

1.5.4 Bandeiras

Um dos métodos padrão para se estudar conjuntos S que possuem estruturas algébricas é por meio de seqüências de subconjuntos — ou cadeias crescentes — $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots$. No formalismo dos espaços vetoriais, uma seqüência estritamente crescente de subespaços (supondo $\dim V = n$), correspondendo à filtração $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r$ em V é denominada *bandeira*. O número r é denominado *comprimento da bandeira* $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r$. A bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ é dita ser *maximal* se $V_0 = \{0\}$, $\bigcup_{i=1}^n V_i = V$, e um subespaço não pode ser inserido entre V_i e V_{i+1} : se $V_i \subset M \subset V_{i+1}$, então ou $V_i = M$ ou $M = V_{i+1}$. Quando $r = n$, então $\dim$

$V_i = i$ para todo i ($1 \leq i \leq n$), e a bandeira é denominada *completa*. Neste caso a bandeira é uma série de composição de V .

Denominamos *assinatura* da bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ à seqüência $\{\dim V_0, \dim V_1, \dots, \dim V_n\}$.

Uma bandeira de comprimento n pode ser construída a partir de qualquer base do espaço V , definindo-se $V_0 = \{0\}$ e $V_i = \text{span} \{e_1, \dots, e_i\}$, para $i \geq 1$. Tal bandeira é maximal e tal construção nos fornece todas as bandeiras maximais.

► **Teorema 7:** *A dimensão do espaço vetorial V é igual à dimensão de qualquer bandeira maximal de V* ◀

Prova: Seja $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$ uma bandeira maximal em V . Para todo $i \geq 1$, tomamos um vetor $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$ e mostraremos que $\{e_1, \dots, e_i\}$ formam uma base de V_i . Primeiramente, $\text{span}_{\text{lin}} \{e_1, \dots, e_{i-1}\} \subset V_{i-1}$, e $e_i \notin V_{i-1}$, portanto segue-se por indução sobre i (já que $e_1 \neq 0$), que $\{e_1, \dots, e_i\}$ é L.I. para todo i .

Agora, por indução em i mostramos que $\{e_1, \dots, e_i\}$ gera V_i . Assuma que tal afirmação seja verdadeira para $i-1$ e seja $M = \text{span}_{\text{lin}} \{e_1, \dots, e_i\}$. Então $V_{i-1} \subset M$ de acordo com a hipótese de indução e $V_{i-1} \neq M$, já que $e_i \notin V_{i-1}$. A definição de maximalidade de uma bandeira implica que $M = V_i$.

Se $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ é uma bandeira maximal finita em V , então de acordo com o que já foi mostrado, os vetores $\{e_1, \dots, e_n\}$, onde $e_i \in V_i \setminus V_{i-1}$, forma uma base de V tal que $\dim V = n$. Se V contém uma bandeira maximal infinita, então essa construção fornece um número arbitrariamente grande de conjuntos de vetores em V , e portanto V possui dimensão infinita ■

▷ **Ex.34:** Prove que qualquer bandeira em um espaço V de dimensão finita pode ser estendida à bandeira maximal, e seu comprimento não excede a $\dim V$ ◀

▷ **Ex.35:** Mostre que em uma bandeira $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_r$, verifica-se que $0 \leq \dim V_0 < \dim V_1 < \dots < \dim V_r \leq n$ ◀

Uma bandeira de qualquer comprimento pode ser obtida a partir de uma bandeira completa, quando eliminamos alguns subespaços vetoriais apropriados. Reciprocamente, qualquer bandeira pode ser completada, inserindo também subespaços vetoriais apropriados. Em geral isso pode ser feita de maneiras alternativas.

▷ **Ex.36:** Complete a seguinte bandeira de $\mathbb{R}^3$:
 $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$ (plano- xy) $\subset \mathbb{R}^3$, de duas maneiras diferentes ◀

Sejam V e W dois $\mathbb{K}$ -espaços, com bases $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ respectivamente. Uma transformação $\phi : V \rightarrow W$ é denominada uma transformação (ou aplicação) linear se $\phi(au+bv) = a\phi(u) + b\phi(v)$, $\forall a, b \in \mathbb{K}, u, v \in V$. A matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ de ϕ em relação às bases acima tem elementos A_{ij} tais que $\phi(e_i) = a_{i1}f_1 + \dots + a_{in}f_n$, $i = 1, \dots, n$. (Isto é, as colunas de A são as coordenadas dos vetores $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$ em relação à base $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset W$).

1.6 Espaço Dual e Funcionais Lineares

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $\alpha : V \rightarrow \mathbb{K}$, definida sobre todo V , é dita ser um funcional linear se $\alpha(au+bv) = a\alpha(u) + b\alpha(v)$, $\forall u, v \in V$ e para todo $a, b \in \mathbb{K}$.

► **Ex.32:** Mostre que, de acordo com a definição acima, para qualquer funcional linear α temos que $\alpha(0) = 0$ ◀

O conjunto de todos os funcionais lineares de V em $\mathbb{K}$ é denominado espaço dual de V e denotado V^* . O conjunto V^* é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{K}$), ao definirmos $(a\alpha + b\beta)(u) := \alpha(au) + \beta(bu)$, $\forall \alpha, \beta \in V^*$, $a, b \in \mathbb{K}$, $u \in V$.

▷ **Ex.37:** Prove que V^* é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ◀

O vetor nulo de V^* é o funcional linear que associa trivialmente todo vetor de V a zero: $\alpha(u) = 0, \forall u \in V$.

▷ **Exemplo 7:** Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ escalares. Definimos $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ a aplicação $\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. A matriz de ϕ é $(a_1, \dots, a_n)$ em relação à base usual de $\mathbb{K}^n$ e à base $\{1\}$ de $\mathbb{K}$. Notamos que todas as funções lineares sobre $\mathbb{K}^n$ são dessa forma, e se $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in \mathbb{K}^n$, então $\phi(x) = x_1\phi(e_1) + \dots + x_n\phi(e_n)$. Denote $\phi(e_i) = a_i$ ◀

▷ **Ex.38:** Defina um funcional $\alpha \in (\mathbb{C}^2)^*$ tal que $\alpha(1, 1) = 0$. Defina um funcional α em $(\mathbb{C}^3)^*$ tal que $\alpha(1, 1, 1) = 0$ e $\alpha(1, i, 3) = 0$. ◀

▷ **Ex.39:** Considere um funcional linear sobre um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Tal funcional pode assumir somente valores reais? ◀

▷ **Ex.40:** Seja $C[a, b]$ o espaço das funções contínuas, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos $\phi(f) = \int_a^b f(t)dt$. Prove que ϕ é um funcional linear ◀

O seguinte teorema é verdadeiro e será implicitamente usado várias vezes no que segue.

► **Teorema 8:** *Seja um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se um vetor v tem a propriedade que $\alpha(v) = 0$ para todo $\alpha \in V^*$ então $v = 0$* ◀

Prova: Seja B uma base em V . Para cada elemento $u \in B$ podemos associar um funcional linear α_u , definido como

$$\alpha_u(v) = v_u, \forall v \in V \quad (1.4)$$

onde, como todo $v \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear finita de elementos de B , podemos sempre escrever $v = v_u u + v'$, onde v' é uma combinação linear finita de elementos de B , e $v_u \in \mathbb{K}$. Além disso, $v_u = 0$, caso u não compareça na decomposição de v em uma soma finita de elementos de B .

▷ **Ex.41:** Mostre que, para cada $u \in B$, $\alpha_u : V \rightarrow \mathbb{K}$ dada pela Eq.(1.4) é um funcional linear ◀

Seja então v um vetor como no enunciado do teorema. Se $\alpha(v) = 0$ para todo $\alpha \in V^*$, vale obviamente que $\alpha_u(v) = 0$, para todo $u \in B$. Isso implica que $v = 0$. ■

▷ **Ex.42:** Considere o espaço das matrizes $n \times n$ $M(n, \mathbb{K})$. Denotando as componentes de $A \in M(n, \mathbb{K})$ por $\{A_{ij}\}$, defina o traço da matriz como sendo o operador

$$\begin{aligned} \text{Tr} : M(n, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} \end{aligned}$$

1. Mostre que Tr é um funcional linear sobre $M(n, \mathbb{K})$.
2. Dadas matrizes $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, mostre que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
3. Mostre que não existem matrizes $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ tais que $AB - BA = I_{n \times n}$.
4. Exiba operadores $A, B \in \text{End}(W)$, onde W é um espaço vetorial de dimensão infinita, onde $AB - BA = \text{Id}_W$.
5. Suponha que $AB - BA = I$. Mostre que $A^m B - BA^m = mA^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$.

◁

► **Proposição 5:** Se $\dim V = n$, então $\dim V^* = n$ e $V \simeq V^*$ ◀

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V . Para cada i , $1 \leq i \leq n$, existe um único $e^i \in V^*$ tal que $e^i(e_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, n$. Os funcionais $e^1, \dots, e^n$ são L.I.: se $\alpha = \alpha_1 e^1 + \dots + \alpha_n e^n$, então $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^j(e_i) = \alpha_i e^i(e_i) = \alpha_i$. Suponhamos $\alpha = 0$, logo $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. O conjunto $\{e^1, \dots, e^n\}$ forma uma base de V^* : se $\alpha \in V^*$, então $\alpha(e_i) = \alpha_i$, e $\alpha = \alpha_1 e^1 + \dots + \alpha_n e^n$. A base $\{e^j\}$ é dita base dual de $\{e_i\}$ ■

▷ **Corolário 1:** Utilizando a notação acima, $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) e^i$ e $v = \sum_{i=1}^n e^i(v) e_i$, para cada $\alpha \in V^*$ e $v \in V$. De fato, seja $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^i$. As coordenadas α_i são únicas, dadas por $\alpha(e_i) = \alpha_i$. Analogamente, se $v = \sum_{i=1}^n b_i e_i$, então $e^j(v) = b_j e^j(e_j) = b_j$ ◁

► **Obs.4:** O isomorfismo (entre espaços vetoriais) $V \simeq V^*$ não é *canônico ou natural*, no sentido que tal isomorfismo depende da escolha de bases. Se mudamos de base em V , o isomorfismo também é modificado. ◀

▷ **Exemplo 8:** Suponha V tal que $\dim V = 1$, para qualquer $0 \neq e_1 \in V$, o conjunto $\{e_1\}$ é base de V . Considere a base dual $\{e^1\} \subset V^*$, que satisfaz por definição $e^1(e_1) = 1$. Dado $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tome outra base $\{a e_1\}$ de V , portanto $\{a^{-1} e^1\} \subset V^*$ é a base dual associada. Mas os mapas lineares $\phi : e_1 \mapsto e^1$ e $\phi_a : a e_1 \mapsto a^{-1} e^1$ são diferentes no caso onde $a^2 \neq 1$ ◁

A todo espaço vetorial V está naturalmente associado o espaço dual V^* de V . Já vimos que esse espaço é o conjunto dos funcionais lineares $\alpha : V \rightarrow \mathbb{K}$ — também denominados covetores. Além disso os covetores $e^i (i = 1, \dots, n)$ foram definidos como

$$e^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Segue-se que os covetores $\{e^i\}$ formam uma base para V^* . As coordenadas de um covetor arbitrário α nessa base são dadas pelo valor de α na base $\{e_i\}$ de V . De fato, dado $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, então $\alpha(v) = \alpha(\sum_{i=1}^n v^i e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \alpha(e_i) = \sum_{i=1}^n v^i \alpha_i$.

▷ **Ex.43:** Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de $V = \mathbb{R}^3$ dada por $e_1 = (1, 0, 1)^T$, $e_2 = (1, 1, -1)^T$ e $e_3 = (0, 1, 2)^T$. Seja $\alpha \in V^*$ o covetor dado por $\alpha(e_1) = 4$, $\alpha(e_2) = 1$, $\alpha(e_3) = 1$. Determine $\alpha(v)$ para $v = (a, b, c)^T$ e expresse α em termos da base canônica de $\mathbb{R}^3$ ◁

Como V^* é um espaço vetorial, é natural nos perguntarmos se podemos definir também um espaço dual ao espaço V^* . Isso é possível, e para tal definimos os funcionais lineares

$$\begin{aligned}\tau : V &\rightarrow (V^*)^* \\ v &\mapsto \tau_v : V^* \rightarrow \mathbb{K} \\ \alpha &\mapsto \alpha(v)\end{aligned}\tag{1.5}$$

Nesse sentido, temos que $\tau_v(\alpha) = \alpha(v)$. Obviamente $\tau_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$. A soma desses funcionais lineares é dada por $\tau_u + \tau_v = \tau_{v+u}$ e a multiplicação por um escalar por $a\tau_v = \tau_{(av)}$. Não é difícil vermos que $\dim (V^*)^* = \dim V$. O resultado fundamental aqui é:

► **Teorema 9:** *Os espaços vetoriais V e $(V^*)^*$ são (canonicamente) isomorfos* ◀

Prova: Pela definição, dados $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$ e $\alpha, \beta \in V^*$, então $\tau_{(au+bv)}(\alpha) = \alpha(au + bv) = a\alpha(u) + b\beta(v) = a\tau_u(\alpha) + b\tau_v(\alpha)$. Portanto τ_u é elemento de $(V^*)^*$ e é linear. Como $\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^*$, então τ é isomorfismo de V em $(V^*)^*$ ■

▷ **Ex.44:** Prove que se $\dim V < \infty$, então toda base de V^* é a dual de alguma base de V ◀

▷ **Ex.45:** Seja $\dim V < \infty$ e $\phi \in (V^*)^*$. Mostre que $\exists ! v \in V$ tal que $\phi(\alpha) = \alpha(v)$, $\forall \alpha \in V^*$ ◀

► **Obs.5:** É sabido que todos os espaços vetoriais com a mesma dimensão são isomorfos, mas o resultado aqui é mais forte: existe um isomorfismo natural (canônico) entre V e $(V^*)^*$ dado por τ . Já vimos que para um espaço vetorial V e o seu dual V^* não existe um isomorfismo natural (no sentido discutido acima). Precisamos de uma estrutura a mais para definirmos o isomorfismo entre estes espaços, e essa estrutura adicional é chamada uma correlação. Para tanto precisamos munir V com uma *métrica*, i.e., uma forma bilinear simétrica não-degenerada.

◀

Considere agora um subespaço $U \subset V$, definimos o *anulador* (ou *aniquilador*) de U :

$$\mathring{U} = \{\alpha \in V^* \mid \alpha(v) = 0, \forall v \in U\}\tag{1.6}$$

▷ **Ex.46:** Mostre que $\mathring{U}$ é subespaço de V^* . Se $U = \{0\}$, então $\mathring{U} = V^*$; se $U = V$, então $\mathring{U} = \{0\} \subset V^*$ ◀

► **Lema 1:** $\dim \mathring{U} = \dim V - \dim U$ ◀

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V tal que $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$. Se $\{e^{1}, \dots, e^n\}$ é uma base de V^* , então $\mathring{U} = \langle e^{k+1}, \dots, e^n \rangle$ ■

Já que sabemos identificar os espaços V e $(V^*)^*$, o anulador de um subespaço $Z \in V^*$ está em V . Por definição, $\mathring{Z} = \{\tau_v \in (V^*)^* \mid \tau_v(\alpha) = \alpha(v) = 0, \forall \alpha \in Z\}$.

► **Teorema 10:** $\mathring{\mathring{U}} \simeq U$, para todo subespaço $U \subset V$ ◀

Prova: $\mathring{U} = \langle \tau_{e_1}, \dots, \tau_{e_k} \rangle \simeq \langle e_1, \dots, e_k \rangle = U$. O isomorfismo $\mathring{U}$ é canônico ■

▷ **Ex.47:** Dado um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V , mostre que se $U \subset V$, então $\mathring{V} \subset \mathring{U}$ ◀

▷ **Ex.48:** Sejam U_1 e U_2 subespaços de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V . Mostre que $(U_1 \cap U_2) = \mathring{U}_1 + \mathring{U}_2$. ◀

1.7 Núcleo e Imagem

Considere $\phi \in \text{Hom}(U, V)$. O conjunto $\ker \phi = \{u \in U \mid \phi(u) = 0\} \subset U$ é denominado *núcleo* de ϕ , e o conjunto $\text{Im } \phi = \{v \in V \mid \exists u \in U, \phi(u) = v\} \subset V$ é denominado *imagem* de ϕ .

▷ **Ex.49:** Seja $A \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definida por: $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, -x_1 - 2x_2 + 2x_3)$. Verifique que A é uma transformação linear e determine a imagem e o posto de A ◁

▷ **Ex.50:** Mostre que $\ker \phi$ e $\text{Im } \phi$ são respectivamente subespaços vetoriais de U e V ◁

► **Teorema 11:** $\phi \in \text{Hom}(U, V)$ é injetiva se, e somente se, $\ker \phi = \{0\}$ ◀

Prova: Suponha que $\ker \phi = \{0\}$. Então $\phi(u_1) = \phi(u_2) \Rightarrow \phi(u_1 - u_2) = \phi(u_1) - \phi(u_2) = 0$ e $u_1 - u_2 \in \ker \phi$, o que implica que $u_1 - u_2 = 0$, ou seja, $u_1 = u_2$. Reciprocamente, se $u \in \ker \phi$, então $\phi(u) = 0 = \phi(0) \Rightarrow u = 0$, logo $\ker \phi = \{0\}$ ■

▷ **Ex.51:** Mostre que $\phi \in \text{Hom}(U, V)$ é injetiva se, e somente se, ϕ leva vetores L.I. em U em vetores L.I. de V ◁

► **Obs.6:** Vimos que um homomorfismo $\phi : U \rightarrow V$ é uma aplicação que preserva estruturas algébricas, no sentido de que $\forall u, v \in U, a \in \mathbb{K}, \phi(au + v) = a\phi(u) + \phi(v)$. Um homomorfismo que possui o núcleo trivial — e portanto injetivo — é denominado *monomorfismo* (ou imersão). No caso em que $\phi(U) = V$, e portanto ϕ é sobrejetivo, ϕ é denominado um *epimorfismo*. Ainda, denominamos por *endomorfismo* todo elemento $\phi \in \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$, e por *automorfismo* um isomorfismo $\phi : V \rightarrow V$ (isomorfismo do mesmo espaço) ◀

▷ **Ex.52:** No espaço $\mathbb{K}_n[x]$ dos polinômios na variável x , considere as aplicações $\phi, \psi \in \text{End}(V)$ definidos por

$$\begin{aligned}\phi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) &= a_1 + a_2x + \cdots + a_nt^{n-1} \\ \psi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) &= a_0x + a_1x^2 + \cdots + a_nt^{n+1}\end{aligned}$$

Mostre que $\phi \circ \psi = I$ e $\psi \circ \phi \neq I$. A aplicação ϕ possui inversa? ◁

► **Teorema 12:** (*Teorema do Núcleo e da Imagem*) Seja U um espaço vetorial de dimensão finita e $\phi \in \text{Hom}(U, V)$. Então $\ker \phi$ e $\text{Im } \phi$ têm dimensão finita, e $\dim \ker \phi + \dim \text{Im } \phi = \dim U$ ◀

Prova: $\ker \phi$ tem dimensão finita, já que $\ker \phi$ é subespaço vetorial de U . Tome uma base $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\ker \phi$ e estenda esta base a uma base $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$ de todo o espaço U . Mostraremos que os vetores $\phi(e_{m+1}), \dots, \phi(e_{m+n})$ formam uma base de $\text{Im } \phi$.

Qualquer vetor em $\text{Im } \phi$ possui a forma

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{m+n} a_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i \phi(e_i), \quad (1.7)$$

pois $\sum_{j=1}^m a_j \phi(e_j) = 0$, já que $\{e_1, \dots, e_m\} \subset \ker(\phi)$, o que significa que $\phi(e_1) = 0 = \cdots = \phi(e_m)$.

Portanto, $\phi(e_{m+1}), \dots, \phi(e_{m+n})$ geram $\text{Im } \phi$. Seja agora a combinação linear $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i \phi(e_i) = 0$. Então, $\phi\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i\right) = 0$, o que significa que $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i \in \ker \phi$, i.e., $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i = \sum_{j=1}^m (a'_j) e_j$, pois $\{e_1, \dots, e_m\}$ é base de $\ker \phi$. Mas $\phi\left(\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i\right) = 0$ só é possível se todos os coeficientes a_i, a'_i forem nulos, pois $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+n}\}$ é base de U . Portanto os vetores $\phi(e_{m+1}), \dots, \phi(e_{m+n})$ são L.I., pois em particular os a_i são nulos ■

▷ **Corolário 2:** Temos que $\dim U = \dim \operatorname{Im} \phi$ se, e somente se $\dim \ker \phi = 0$, i.e., $\ker \phi = \{0\}$. Neste caso, ϕ é injetiva e também sobrejetiva, i.e., ϕ é isomorfismo ◁

Um subespaço de dimensão $n - 1$ de um $\mathbb{K}$ -espaço V de dimensão n é denominado de *hiperplano* — ou subespaço de codimensão 1. Se $0 \neq \alpha \in V^*$ e se $\dim V = n$, então $\dim \operatorname{Im} \alpha = 1$ e $\dim \ker \alpha = n - 1$, pois $\operatorname{Im} \alpha = \mathbb{K}$, e $\dim \mathbb{K} = 1$. O teorema do Núcleo e da Imagem nos diz que $\dim \ker \alpha = n - 1$.

► **Obs.7:** Quando a dimensão de V é infinita, um hiperplano é um subespaço $U \subset V$ tal que $U \neq V$, e se W é um subespaço, $U \subseteq W \subseteq V$, então $W = V$ ou $W = U$, o que caracteriza U como um subespaço próprio maximal de V ◀

► **Teorema 13:** Se $0 \neq \alpha \in V^*$, então $\ker \alpha$ é hiperplano em V . Reciprocamente, todo hiperplano de V é o núcleo de um funcional $\alpha \in V^*$ (α não é único). ◀

Prova: Dado $0 \neq \alpha \in V^*$, existe $v \in V$ tal que $\alpha(v) \neq 0$. Seja $u \in V$, definamos $a = \alpha(u)/\alpha(v)$. Então $w = u - av \in \ker \alpha$, pois $\alpha(w) = \alpha(u - av) = \alpha(u) - a\alpha(v) = 0$. Portanto $u = w + av \in (\ker \alpha + \langle v \rangle)$, e portanto $\ker \alpha$ é hiperplano. Reciprocamente, seja $\ker \alpha$ um hiperplano em V , e seja $v \in V \setminus \ker \alpha$. Então, já que $\ker \alpha$ é subespaço próprio maximal de V , temos que $V = \ker \alpha + \langle v \rangle$, e cada $u \in V$ tem a representação $u = w + av$, $a \in \mathbb{K}$ e $w \in \ker \alpha$. Se tivéssemos $u = w' + a'v$, $a' \in \mathbb{K}$ e $w' \in \ker \alpha$, então $(a - a')v = w' - w$. Se $a - a' \neq 0$, temos $v \in \ker \alpha$, o que não é possível. Portanto $a = a'$ e $w = w'$ ■

▷ **Ex.53:** Seja $V = M(n, \mathbb{K})$. Prove que $\operatorname{End}(V) \simeq (\operatorname{End}(V))^*$ (Dica: Prove que para qualquer $\alpha \in V^*$ existe uma única matriz $A \in V$ com a propriedade de que $\alpha(X) = \operatorname{Tr}(AX)$, $\forall X \in V$). ◁

1.8 Soma Direta

Considere $\{V_i\}_{i=1}^n$ subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V . Dizemos que V é *soma direta* de $V_1, \dots, V_n$ se todo $v \in V$ puder ser representado da forma $v = \sum_{i=1}^n v_i$, onde $v_i \in V_i$. Se isso ocorrer, escrevemos

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

▷ **Exemplo 9:** Considere $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V e seja $V_i = \langle e_i \rangle$. Então $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. É claro que quando $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ então $V = \sum_{i=1}^n V_i$. A recíproca não é verdadeira. ◁

Mais geralmente, se tivermos uma coleção finita de espaços vetoriais $V_1, \dots, V_n$ sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$ procedemos analogamente, primeiro definindo o grupo abeliano $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ e depois definindo a multiplicação por escalares por $a(v_1 \oplus \cdots \oplus v_n) := (av_1) \oplus \cdots \oplus (av_n)$, com $a \in \mathbb{K}$ e $v_1 \oplus \cdots \oplus v_n \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$. O espaço vetorial (sobre $\mathbb{K}$) assim definido é denotado por $V_1 \oplus_{\mathbb{K}} \cdots \oplus_{\mathbb{K}} V_n$.

▷ **Ex.54:** Mostre que dados $v_i \in V_i$, as aplicações

$$\begin{aligned} \phi : (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 &\rightarrow V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \\ (v_1 + v_2) + v_3 &\mapsto \phi((v_1 + v_2) + v_3) = v_1 + v_2 + v_3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

e

$$\begin{aligned}\psi : V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) &\rightarrow V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 \\ v_1 + (v_2 + v_3) &\mapsto \psi(v_1 + (v_2 + v_3)) = v_1 + v_2 + v_3\end{aligned}\quad (1.9)$$

são isomorfismos (canônicos) $\triangleleft$

▷ **Ex.55:** Sejam V_1 e V_2 subespaços vetoriais de V , com $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. Defina a aplicação linear

$$\begin{aligned}\phi : V_1 \times V_2 &\rightarrow V_1 \oplus V_2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto \phi(v_1, v_2) = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\end{aligned}$$

Prove que ϕ é um isomorfismo. $\triangleleft$

Agora, se $V_1 \cap V_2 \neq \{0\}$, defina a aplicação linear

$$\begin{aligned}\phi : V_1 \times V_2 &\rightarrow V_1 + V_2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\end{aligned}$$

ϕ é sobrejetiva, o que implica que $\dim \operatorname{Im} \phi = \dim (V_1 + V_2)$. Além disso, $\ker \phi = \{(v, -v) \mid v \in V_1 \cap V_2\}$. A aplicação

$$\begin{aligned}\psi : V_1 \cap V_2 &\rightarrow \ker \phi \\ v &\mapsto (v, -v)\end{aligned}$$

é um isomorfismo (Prove!). Portanto,

$$\begin{aligned}\dim V_1 + \dim V_2 &= \dim(V_1 \times V_2) \\ &= \dim \ker \phi + \dim \operatorname{Im}(\phi), \text{ pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,} \\ &= \dim \ker \phi + \dim(V_1 + V_2) \\ &= \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(V_1 + V_2)\end{aligned}$$

▷ **Ex.56:** Dados U_1 e U_2 subespaços vetoriais de U tais que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, mostre que $B_1 \cup B_2$ é base de $U_1 \oplus U_2$, onde B_1 é base de U_1 e B_2 é base de U_2 . $\triangleleft$

► **Teorema 14:** Sejam $\{V_i\}_{i=1}^n \subset V$ subespaços vetoriais de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V . Então $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ se, e somente se, valer qualquer uma das seguintes condições:

a) $V = \sum_{i=1}^n V_i$ e $V_j \cap (\sum_{i \neq j} V_i) = \{0\}$, $\forall j = 1, \dots, n$.

b) $V = \sum_{i=1}^n V_i$ e $\sum_{i=1}^n \dim V_i = \dim V$ (aqui assumimos que $\dim V = n < \infty$). ◀

Prova: a) A unicidade da representação de qualquer vetor $v \in V$ na forma $\sum_{i=1}^n v_i \in V$ é equivalente à unicidade do vetor $\mathbf{0} \in V$. Com efeito, se $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n v'_i$, então $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n (v_i - v'_i)$ e vice-versa. Se existir uma representação não-trivial de $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n (v_i - v'_i)$, na qual, digamos, $v_j - v'_j \neq 0$, então $v_j - v'_j \in \sum_{i \neq j} V_i \cap (\sum_{i \neq j} V_i)$, e portanto a condição a) não é mais válida.

b) Se $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$, então $\sum_{i=1}^n V_i = V$ e $\sum_{i=1}^n \dim V_i = \dim V$, pois $\bigcup_{i=1}^n V_i = V$ e portanto

contém uma base de V . Pelo Teorema anterior — que diz que $\dim V_1 \dim V_2 = \dim (V_1 \cap V_2) + \dim (V_1 + V_2)$ — aplicado aos subespaços V_j e $\sum_{i \neq j} V_i$, temos

$$\dim \left(V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i \right) \right) + \dim V = \dim V_j + \dim \left(\sum_{i \neq j} V_i \right)$$

Mas a asserção a) nos diz que $\dim \left(V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i \right) \right) = 0$. Ademais, se $\sum_{i=1}^n V_i = \oplus_{i=1}^n V_i$, então $\sum_{i \neq j} V_i = \oplus_{i \neq j} V_i$, e, por indução, provamos que

$$\dim \left(\sum_{i \neq j} V_i \right) = \sum_{i \neq j} \dim V_i.$$

Portanto, $\dim \sum_{i=1}^n V_i = \dim V$.

Reciprocamente, se $\dim \sum_{i=1}^n V_i = \dim V$, então a união das bases de todos os V_i consiste de $\dim V$ elementos, e gera todo o $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V , sendo portanto uma base de V . Com efeito, uma representação não-trivial do vetor $\mathbf{0} \in V$ na forma $\sum_{i=1}^n v_i \in V$ forneceria uma combinação nula não-trivial de elementos da base, o que seria impossível ■

Dizemos que uma aplicação linear $P : V \rightarrow V$ é um operador de projeção se $P^2 = P \circ P = P$. Podemos associar n operadores de projeção $\{P_i\}_{i=1}^n$ à soma direta $\oplus_{i=1}^n V_i$ da seguinte maneira: para quaisquer $v_j \in V_j$,

$$P_i \left(\sum_{j=1}^n v_j \right) = v_i$$

Os mapas P_i estão bem definidos, já que $v \in V$ pode ser unicamente representado por $v = \sum_{j=1}^n v_j$, $v_j \in V_j$. A linearidade de P_i e a propriedade $P_i^2 = P_i$ seguem diretamente da definição. Evidentemente, $V_i = \text{Im } P_i$.

▷ **Ex.57:** a) Verifique que $P_i P_j = 0$, se $i \neq j$.

b) Prove que $\sum_{i=1}^n P_i = I$ ◁

▷ **Ex.58:** Quando a soma de dois operadores de projeção é novamente um operador de projeção?

◁

▷ **Ex.59:** Dado $\phi \in \text{Hom}(U, V)$ tal que $\phi^2(1 - \phi) = 0$, ϕ é idempotente? Tal condição é equivalente a $\phi(1 - \phi)^2 = 0$? ◁

► **Teorema 15:** Sejam $P_1, \dots, P_n : V \rightarrow V$ um conjunto finito de operadores de projeção satisfazendo as condições $P_i P_j = 0$, se $i \neq j$, e $\sum_{i=1}^n P_i = I$. Seja $V_i = \text{Im } P_i$. Então, $V = \oplus_{i=1}^n V_i$. ◀

Prova: Aplicando-se o operador $I = \sum_{i=1}^n P_i$ a cada vetor $v \in V$, obtemos $v = \sum_{i=1}^n P_i(v)$, onde $P_i(v) \in V_i$. Portanto $V = \sum_{i=1}^n V_i$. Para mostrar que essa soma é uma soma direta, pelo critério a) do Teorema anterior, considere $v \in V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i \right)$. A definição dos espaços $V_i = \text{Im } P_i$ implica que existem vetores $v_1, \dots, v_n$ tais que $v = P_j(v_j)$, pois em particular se $v \in V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i \right)$, isso significa que $v \in V_j = \text{Im } P_j$ e $v \in \sum_{i \neq j} P_i(v_i)$. Portanto,

$$v = P_j(v_j) = \sum_{i \neq j} P_i(v_i).$$

Aplicando P_j à igualdade acima, e usando que $P_j^2 = P_j$, $P_i P_j = 0$, $i \neq j$, obtemos

$$P_j P_j(v_j) = P_j(v_j) = \sum_{i \neq j} P_j P_i(v_i) = 0. \quad (1.10)$$

Provamos que dado um vetor $v \in V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i\right)$ arbitrário, então $v = 0$, o que significa que $V_j \cap \left(\sum_{i \neq j} V_i\right) = \{0\}$, e portanto pelo critério a) do Teorema 14, segue-se que $\bigcap_{i=1}^n V_i = \{0\}$ ■

► **Obs.8:** Se $\dim V = n < \infty$, então para qualquer subespaço $V_1 \subset V$, existe um subespaço $V_2 \subset V$ tal que $V = V_1 \oplus V_2$. Dizemos que V_2 é o *complemento direto* de V_1 . ◀

Podemos definir somas diretas de operadores lineares, considerando $U = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ e $V = \bigoplus_{i=1}^n V_i$ e $\phi : U \rightarrow V$ uma aplicação linear tal que $\phi(U_i) = V_i$. Denotamos por $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ o mapa linear induzido, e escrevemos $\phi = \bigoplus_{i=1}^n \phi_i$. Escolhendo bases de U e V como a respectiva união de bases de U_i e V_i , a matriz de ϕ é a união de blocos diagonais.

► **Ex.60:** Considere $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$ uma bandeira em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, onde $m_i = \dim V_i$. Prove que, dada uma outra bandeira $V'_1 \subset V'_2 \subset \cdots \subset V'_n$ tal que $m'_i = \dim V'_i$, então existe $\zeta \in \text{Aut}(V)$ que leva uma bandeira na outra se, e somente se, $m_i = m'_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$ ◀

► **Teorema 16:** Seja $P \in \text{End}(V)$. Se $P^2 = P$, então $V = \ker P \oplus \text{Im } P$ ◀

Prova: Para todo $v \in V$, podemos escrever $v = P(v) + (v - P(v))$. Um cálculo imediato mostra que $(v - P(v)) \in \ker P$, e portanto $V = \ker P + \text{Im } P$. Se $u \in \ker P \cap \text{Im } P$, temos que $P(u) = 0$ e $P(u) = u$, pois $\forall u \in \text{Im}(P)$, temos que $u = P(w)$, para algum $w \in V$, o que significa que $P(u) = P(P(w)) = P(w) = u$. Portanto $u = 0$ e $V = \ker P \oplus \text{Im } P$ ■

► **Ex.61:** Considere uma involução $\omega \in \text{End}(V)$ (isto é, $\omega^2 = I$). Defina os conjuntos $V_1 = \{v \in V \mid \omega(v) = v\}$ e $V_2 = \{v \in V \mid \omega(v) = -v\}$. Mostre que V_1 e V_2 são subespaços vetoriais de V e que $V = V_1 \oplus V_2$. Mostre que para todo $v = v_1 + v_2$, onde $v_a \in V_a$ ($a = 1, 2$), temos que $\omega(v) = v_1 - v_2$, e que $P = \frac{1}{2}(\omega + I)$ é a projeção sobre V_1 paralelamente a V_2 ◀

► **Ex.62:** Considere $\mathbb{K}_n[x]$ o conjunto dos polinômios de grau menor igual que n , sobre um corpo $\mathbb{K}$. Mostre que o conjunto de todos os polinômios pares $\mathbb{K}_n^E[x]$ ($p(x) = p(-x)$) e o conjunto de todos os polinômios ímpares $\mathbb{K}_n^O[x]$ ($p(x) = -p(-x)$) são subespaços vetoriais. Mostre também que $\mathbb{K}_n[x] = \mathbb{K}_n^E[x] \oplus \mathbb{K}_n^O[x]$ ◀

1.9 Espaços Quocientes

Considere um subespaço vetorial $U \subseteq V$. Existem geralmente vários subespaços $W \subset V$ tais que $W \cap U = \{0\}$ e $W + U = V$. Em outras palavras, U pode ter diversos complementos, e não há uma maneira natural de escolher qualquer um desses complementos. Contudo, existe uma construção natural que associa a U e V um novo espaço que para fins práticos desempenha o papel de complemento de U em relação a V . A vantagem formal que essa construção possui sobre qualquer outra que possa descrever um complemento arbitrário de U é que ela tem um caráter *natural*, e em particular não depende da escolha de uma base.

Suponha por exemplo $V = \mathbb{R}^2$ e $U = \{(x, y) \mid y = 0\}$ o eixo- x . Cada complemento de U é uma linha — que não seja o eixo- x — através da origem. Observando que cada complemento

possui a propriedade de que a única interseção com o eixo- x consta de um único ponto, a idéia que paira sobre espaços quocientes neste caso é podermos construir todo o $\mathbb{R}^2$ a partir de linhas horizontais.

Voltando agora ao caso mais geral, se $v \in V$, o conjunto $v+U$ que consiste de todos os vetores $v+u$, $u \in U$, é denominado classe lateral de U . No exemplo do parágrafo anterior, as classes laterais são linhas horizontais. Pelo que vimos na Seção (1.2) podemos ter $v_1 + U = v_2 + U$, mesmo que $v_1 \neq v_2$.

Dado um subespaço vetorial $U \subseteq V$, as translações de U por um vetor $v \in V$ correspondem ao conjunto

$$v + U = \{v + u \mid u \in U\}.$$

Tais translações não são, necessariamente, subespaços vetoriais de V , e são denominadas *subvariedades lineares*.

► **Definição 1:** Dados $U \subseteq V$ um subespaço vetorial e $v_1, v_2 \in V$, dizemos que v_1 é congruente a v_2 módulo U se $v_1 - v_2 \in U$ e escrevemos $v_1 \equiv v_2 \pmod{U}$ ou $v_1 \equiv v_2 \pmod{U}$ ou $v_1 \overset{U}{\equiv} v_2$. A congruência módulo U é uma relação de equivalência sobre V . (Mostre!) ◀

► **Obs.9:** Se $v \in V$, a classe lateral de v é dada por $\bar{v} = \{w \in V \mid v - w \in U\} = \{v + w \mid w \in U\}$. Por essa razão indicamos $\bar{v} = \{v + U \mid v \in V\}$. ◀

► **Definição 2:** A coleção de todas as classes laterais de U será indicada por V/U . Dados $v_1, v_2 \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, definimos a soma e multiplicação por escalar como: a) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}$
b) $a\bar{v}_1 = \overline{av_1}$ ◀

A fim de verificarmos que a definição está correta, devemos mostrar que a soma e multiplicação por escalar independem dos representantes, e dependem exclusivamente das classes laterais. Suponha que $\bar{v}_1 (= v_1 + U) = \bar{w}_1 (= w_1 + U)$. Pela definição, $v_1 - w_1 = u_1 \in U$ e $v_2 - w_2 = u_2 \in U$. Portanto,

$$\begin{aligned} \overline{v_1 + v_2} = (v_1 + v_2) + U &= (w_1 + w_2) + u_1 + u_2 + U \\ &= (w_1 + w_2) + U \\ &= \overline{w_1 + w_2} \end{aligned}$$

Agora, como $v_1 - w_1 = u_1 \in U$, então $av_1 - aw_1 = au_1 \in U$ e portanto

$$\begin{aligned} \overline{av_1} = av_1 + U &= aw_1 + au_1 + U \\ &= aw_1 + U \\ &= \overline{aw_1} \end{aligned}$$

Isso mostra que a soma e multiplicação por escalar dependem somente das classes laterais e estão bem definidas. O espaço vetorial V/U assim obtido é denominado espaço quociente de V por U .

► **Obs.10:** O vetor nulo $\bar{0}$ de V/U é a classe de equivalência que consiste de $\bar{0} = \{0 + U\} = U$. ◀

▷ **Ex.63:** Mostre que o conjunto V/U é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com as operações definidas acima ◀

► **Definição 3:** A transformação

$$\begin{aligned}\pi : V &\rightarrow V/U \\ v &\mapsto \pi(v) = \bar{v} = v + U\end{aligned}$$

é denominada projeção canônica. ◀

Podemos provar que $\pi \in \text{Hom}(V, V/U)$ e que $\ker \pi = U$ e $\text{Im } \pi = V/U$. De fato, dados $u, v \in V$ e $a \in \mathbb{K}$, temos que $\pi(au + v) = au + v + U = a(u + U) + v + U = a\pi(u) + \pi(v)$. Além disso, $\ker \pi = \{v \in V \mid \pi(v) = \bar{0} = 0 + U = U\}$, e portanto $v \in U$. Podemos daí demonstrar o

► **Proposição 6:** Se V tem dimensão finita, então $\dim V/U = \dim V - \dim U$ ◀

Prova: Em relação à aplicação canônica $\pi : V \rightarrow V/U$, já que $\ker \pi = U$ e $\text{Im } \pi = V/U$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim \ker \pi + \dim \text{Im } \pi = \dim V$, e portanto $\dim U + \dim V/U = \dim V$. Portanto,

$$\boxed{\dim V/U = \dim V - \dim U}$$

► **Obs.11:** O número $\dim V/U$ é geralmente denominado *codimensão* do subespaço vetorial U em V , e denotado por $\text{codim } U$ ou $\text{codim}_V U$ ◀

► **Definição 4:** Sejam W, V dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Dado $\phi \in \text{Hom}(W, V)$, a *coimagem* e o *conúcleo* de ϕ são definidos por

$$\text{coim } \phi = W/\ker \phi, \quad \text{coker } \phi = V/\text{Im } \phi$$

A coimagem e o conúcleo estão bem definidos, no sentido de que $\text{Im } \phi$ é subespaço de V , enquanto $\ker \phi$ é subespaço vetorial de W .

Definimos também o *índice* de ϕ como sendo o número

$$\text{ind } \phi = \dim \text{coker } \phi - \dim \ker \phi$$

◀

No caso onde V e W possuem dimensão finita, obtemos do Teorema acima, que

$$\begin{aligned}\text{ind } \phi &= (\dim V - \dim \text{Im } \phi) - (\dim W - \dim \text{Im } \phi) \\ &= \dim V - \dim W\end{aligned}$$

Nesse caso, o índice de um operador $\phi \in \text{Hom}(W, V)$ somente depende dos espaços V e W .

▷ **Ex.64:** Prove que $\text{ind } \phi = 0$, $\forall \phi \in \text{Aut}(V)$, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita ◀

Vimos que existe um epimorfismo natural (canônico) π entre V e o espaço quociente V/U , que mapeia $v \in V$ a sua classe de equivalência $\bar{v} = [v]$. O núcleo de tal epimorfismo é o subespaço U . Definimos a *seqüência exata*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \xrightarrow{\pi} V/U \longrightarrow 0$$

1.9.1 Teoremas de Isomorfismos

O Teorema a seguir diz que dado um homomorfismo $\varphi : V \rightarrow U$ entre dois $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, então

$$\boxed{V/\ker \varphi \simeq \operatorname{Im} \varphi}$$

► **Teorema 17:** *Seja $\varphi \in \operatorname{Hom}(V, U)$ tal que $\varphi(V) = U$. Então existe um único isomorfismo $\bar{\varphi} : V/\ker \varphi \rightarrow U$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, onde $\pi : V \rightarrow V/\ker \varphi$ é a projeção canônica ◀*

Prova: Note que $\pi : V \rightarrow V/\ker \varphi$ e $\bar{\varphi} : V/\ker \varphi \rightarrow U$, e portanto $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi : V \rightarrow U = \varphi(V)$. Defina a aplicação induzida

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : V/\ker \varphi &\rightarrow U = \varphi(V) \\ \bar{v} = v + \ker \varphi &\mapsto \varphi(v) \end{aligned}$$

Primeiramente devemos verificar se $\bar{\varphi}$ é, de fato, bem definida. Com efeito, dados $v_1, v_2 \in V$ e portanto $\bar{v}_1 = v_1 + \ker \varphi$, $\bar{v}_2 = v_2 + \ker \varphi \in V/\ker \varphi$, se $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, significa que $v_1 + \ker \varphi = \bar{v}_2 = v_2 + \ker \varphi$. Daí, existe $w \in \ker \varphi$ tal que $v_1 = v_2 + w$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{v}_1) = \varphi(v_1) &= \varphi(v_2 + w) = \varphi(v_2) + \varphi(w), \text{ pois } \varphi \in \operatorname{Hom}(V, U) \\ &= \varphi(v_2) + 0, \text{ pois } w \in \ker \varphi \\ &= \varphi(v_2) = \bar{\varphi}(\bar{v}_2) \end{aligned}$$

Portanto a função $\bar{\varphi}$ está bem definida.

A fim de provar que $\bar{\varphi}$ é isomorfismo, resta agora provar que $\bar{\varphi}$ é bijetiva e linear. Por construção $\bar{\varphi}$ é linear, pois é a composição de duas aplicações lineares.

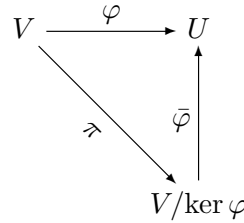
Para ver que $\bar{\varphi}$ é sobrejetiva, como $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \varphi(v)$ e já que $\bar{\varphi}(V/\ker \varphi) = \varphi(V) = U$, então a função $\bar{\varphi} : V/\ker \varphi \rightarrow U$ contempla todo o espaço de chegada U .

Agora para provar que $\bar{\varphi}$ é injetiva, mostraremos que $\ker \bar{\varphi} = \bar{0}$. Por definição,

$$\begin{aligned} \ker \bar{\varphi} &= \{\bar{v} \in V/\ker \varphi \mid \bar{\varphi}(\bar{v}) = 0\} \\ &= \{v + \ker \varphi \mid \varphi(v) = 0\} \\ &= \{v + \ker \varphi \mid v \in \ker \varphi\} \\ &= \ker \varphi \\ &= 0 + \ker \varphi \\ &= \bar{0} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Já demonstramos que se o núcleo de uma aplicação consistir somente do elemento zero, então tal aplicação é injetiva. Portanto $\bar{\varphi}$ é bijetiva e linear, sendo portanto um isomorfismo. Resta mostrar que tal isomorfismo é único. Suponha que existam dois isomorfismos $\bar{\varphi}_1 : V/\ker \varphi \rightarrow U$ e $\bar{\varphi}_2 : V/\ker \varphi \rightarrow U$, ambos com a propriedade $\bar{\varphi}(\bar{v}) = \varphi(v)$. Então, para todo $v \in V$, $\bar{\varphi}_1(\bar{v}) - \bar{\varphi}_2(\bar{v}) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$, e portanto $(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2)(\bar{v}) = 0$, $\forall \bar{v} \in V/\ker \varphi$. Consequentemente, $\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2 = 0$ e $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_2 = 0$ ■

O Teorema acima demonstrado pode ser ilustrado pelo seguinte diagrama:



► **Obs.12:** Esse Teorema é mais conhecido como o 1º Teorema dos Homomorfismos. Aqui ele é enunciado em termos de espaços vetoriais por se tratarem de grupos abelianos com relação à soma.

▷ **Exemplo 10:** Ao tomarmos a projeção $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $P(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$, podemos ver que $\ker P = (0, 0, \dots, 0, x_{n+1}) \simeq \mathbb{R}$ e portanto pelo teorema acima, considerando-se $V = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $\text{Im}(P) = \mathbb{R}^n$, e portanto, segue-se que

$$\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

◁

▷ **Ex.65:** Mostre que $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}^p \simeq \mathbb{R}^{n-p}$ para todo $p = 0, 1, \dots, n$ ◁

A seguir enunciaremos e demonstraremos o chamado 2º Teorema dos Homomorfismos ◀

► **Teorema 18:** Considere $V_1, V_2 \subset V$ dois subespaços vetoriais de V . Então

$$\boxed{\frac{V_1 + V_2}{V_2} \simeq \frac{V_1}{V_1 \cap V_2}}$$

◀

Prova: Defina a aplicação

$$\begin{aligned}
 \sigma : V_1 &\rightarrow \frac{V_1 + V_2}{V_2} \\
 v_1 &\mapsto v_1 + V_2, \quad \forall v_i \in V_i, \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

Já que $v_1 + V_2 = \overline{v_1}$, então σ é um epimorfismo, pois sendo sobrejetiva, dados $a \in \mathbb{K}$ e $w_1 \in V_1$,

$$\begin{aligned}
 \sigma(av_1 + w_1) &= \overline{av_1 + w_1} = a\overline{v_1} + \overline{w_1} \\
 &= a\sigma(v_1) + \sigma(w_1)
 \end{aligned}$$

e portanto σ é linear. Agora provaremos que $\ker \sigma = V_1 \cap V_2$. Por um lado, $\ker \sigma = \{v_1 \in V_1 \mid \sigma(v_1) = \bar{0} = 0 + V_2\}$. Mas $\sigma(v_1) = v_1 + V_2$, o que implica que v_1 deve estar em V_2 também. Portanto dado $v \in \ker \sigma$, necessariamente $v \in V_1 \cap V_2$. Reciprocamente, dado $v \in V_1 \cap V_2$, então $\sigma(v) = v + V_2 = V_2 = \bar{0}$, pois em particular $v \in V_2$. Portanto $\ker \sigma = V_1 \cap V_2$.

A partir do 1º Teorema dos Isomorfismos, sabemos que para $\sigma \in \text{Hom}(V_1, (V_1 + V_2)/V_2)$ segue-se que $V_1/\ker \sigma \simeq \text{Im } \sigma$, pelo Teorema 17. Como $\ker \sigma = V_1 \cap V_2$ e $\text{Im } \sigma = (V_1 + V_2)/V_2$, portanto

$$\frac{V_1 + V_2}{V_2} \simeq \frac{V_1}{V_1 \cap V_2}, \quad \blacksquare$$

▷ **Ex.66:** Dados V_1, V_2 subespaços vetoriais de V , explicita o Segundo Teorema dos Isomorfismos quando V_1 é o eixo- x e V_2 é o eixo- y ◁

▷ **Ex.67:** Suponha que um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V possa ser escrito como $V = V_1 \oplus V_2$. Considere a aplicação canônica

$$\begin{aligned}\kappa : V_1 &\rightarrow \frac{V}{V_2} \\ v &\mapsto \bar{v} = v + V_2\end{aligned}$$

Mostre que κ é um isomorfismo ◁

▷ **Ex.68:** Dado U um subespaço vetorial de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V , mostre que $(V/U)^* \simeq \mathring{U}$
◁

2.1 Preliminares

Uma aplicação linear $\phi : W \rightarrow V$ é unicamente determinada pelas imagens dos vetores da base de U . Com efeito, dada uma base $\{e_i\}$ de W , para todo vetor $v = \sum_i a_i e_i$ temos

$$\phi(v) = \sum_i a_i \phi(e_i)$$

Se $v_i \in V$ são vetores arbitrários, então $\phi : W \rightarrow V$ definido como $\phi(v) = a_i v_i$ é linear, e $\phi(e_i) = v_i$. Considerando $\phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ um mapa linear, aplicando ϕ a $e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$, temos que

$$\phi(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \in \mathbb{K}^m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

A matriz do operador ϕ na base $\{e_i\}$ é a matriz (a_{ij}) determinada por $\phi(e_i) = \sum_j a_{ij} e_j$.

► **Definição 5:** Um subespaço vetorial $U \subset V$ é invariante com respeito a um operador linear $\phi \in \text{End}(V)$ se $\phi(U) \subset U$ ◀

A restrição $\phi|_U$ de ϕ ao subespaço invariante U é uma aplicação linear em U . Se escolhermos uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , tal que $U = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ — o que é sempre possível — então a matriz de ϕ tem a forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

onde A é a matriz do operador $\phi|_U$ na base $\{e_1, \dots, e_k\}$, C é uma matriz de ordem $n - k$ e B é uma matriz $k \times (n - k)$.

No caso em que $V = U \oplus W$, onde U e W são dois subespaços invariantes, se $\{e_1, \dots, e_k\}$ é base de U e $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ é base de W , então $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de V , e nessa base podemos escrever a representação matricial de ϕ como

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz do operador $\phi|_U$ na base $\{e_1, \dots, e_k\}$ e C é a matriz do operador $\phi|_W$ na base $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$. Mais geralmente, se pudermos cindir V como a soma direta de k subespaços invariantes $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$, então na base de V , formada por bases dos subespaços V_i , a

matriz de ϕ é da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

onde A_i é a matriz do operador $\phi|_{V_i}$.

▷ **Exemplo 11:** A rotação de um vetor por um ângulo θ é um operador linear em $\mathbb{R}^2$. Em uma base ortonormal sua matriz é dada por

$$\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Em particular, uma rotação de $\pi/2$ nessa base corresponde à matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Encontremos a matriz de tal operador na base

$$\begin{aligned} e'_1 &= 2e_2 \\ e'_2 &= e_1 - e_2 \end{aligned}$$

A matriz mudança de base B é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\Pi(\theta)' = B^{-1}\Pi(\theta)B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.69:** Seja $\phi : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ dada por $\phi(x, y, z) = (x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$. A matriz de ϕ em relação à base canônica de $\mathbb{K}^3$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Seja uma outra base $\{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ dada por $f_1 = (1, 0, 1)$, $f_2 = (-1, 2, 1)$ e $f_3 = (2, 1, 1)$. Determine a matriz de ϕ na base $\{f_i\}$ ◁

▷ **Exemplo 12:** Similarmente, a rotação em torno de um eixo por um ângulo θ é um operador linear em $\mathbb{R}^3$. Numa base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ tal que e_3 seja colinear com o eixo de rotação, o operador tem a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \Pi(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isso concorda com a maneira pela qual $\mathbb{R}^3$ é cindido na soma direta $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_3 \rangle$ ◁

2.2 Transformações Gradiente e Contragradiente

A diferença entre vetores e covetores pode ser bem explorada considerando-se, por exemplo, o efeito de uma mudança de base. Vamos considerar uma mudança $\mathfrak{B} \xrightarrow{B} \mathfrak{B}'$ descrita por $e'_j = \sum_{i=1}^n B^i_j e_i$. Um vetor v tem coordenadas $\{v^i\}$ na base $\mathfrak{B}$ e coordenadas $\{v'^i\}$ na base $\mathfrak{B}'$, de modo que $v = \sum_i v^i e_i = \sum_i v'^i e'_i$. A relação entre essas coordenadas é portanto $v^j = \sum_i B^j_i v'^i$.

Sejam agora $\mathfrak{B}^* = \{e^i\}$ e $\mathfrak{B}'^* = \{e'^i\}$ as bases respectivamente duais às bases $\mathfrak{B} = \{e_i\}$ e $\mathfrak{B}' = \{e'_i\}$, respectivamente. Temos portanto $e^i(e_j) = e'^i(e'_j) = \delta_{ij}$. Como vimos acima, as coordenadas de um funcional $\alpha \in V^*$ nas bases $\mathfrak{B}^*$ e $\mathfrak{B}'^*$ são dadas pelo valor desse funcional nas bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$, respectivamente. Logo $\alpha = \alpha_i e^i = \alpha'_i e'^i$ onde $\alpha_i = \alpha(e_i)$ e $\alpha'_i = \alpha(e'_i)$. Se $e'_j = \sum_i B^i_j e_i$ então $\alpha'_j = \sum_i B^i_j \alpha_i$ e daí $e^j = \sum_i B^j_i e'^i$. Em resumo, numa mudança de base as coordenadas de um covetor transformam-se da mesma maneira que os vetores da base, ou seja, enquanto que as coordenadas de um vetor transformam-se da mesma maneira que os covetores da base dual.

Às vezes se denomina a transformação dos vetores da base de *gradiente* e a transformação das coordenadas de *contragradiente*. Segundo essa denominação então os vetores da base dual se transformam de maneira contragradiente enquanto as coordenadas dos covetores se transformam de maneira gradiente.

2.3 Funcionais Bilineares

Os axiomas de espaço vetorial não incorporam a geometria dos vetores no espaço euclidiano pois não há como se definir comprimento e ângulo entre vetores sem introduzir o conceito de *métrica* no seu espaço. Consideramos nesta Seção funções que generalizam o produto interno.

► **Definição 6:** Um funcional bilinear (ou forma bilinear) em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V é uma função $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ que é linear em cada argumento ◀

Por bilinearidade entendemos a linearidade em cada um dos argumentos da aplicação, ou seja, dados $a, b \in \mathbb{K}$ e $u, v, w \in V$, então $g(av + bu, w) = ag(v, w) + bg(u, w)$ e $g(v, au + bw) = ag(v, u) + bg(v, w)$.

▷ **Exemplo 13:** O produto interno em $\mathbb{R}^3$ é uma função bilinear em $\mathbb{R}^3$. A função $g(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$ é uma função bilinear em $C[a, b]$. Já a função $g(X, Y) = \text{Tr}(XY)$ é uma função bilinear no espaço $M(n, \mathbb{K})$ ◀

O *núcleo* de uma função bilinear g é o subespaço $\ker g = \{v \in V \mid g(u, v) = 0, \forall u \in V\}$. Dizemos que g é *não-degenerada* se $\ker g = \{0\}$.

Pode-se mostrar que o funcional bilinear g é não-degenerado se e somente se para cada vetor $v \neq 0$ existir um vetor $u \neq 0$ tal que $g(v, u) \neq 0$.

O espaço vetorial equipado com um funcional bilinear $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é dito um espaço com produto escalar. A quantidade $g(v, u)$ é muitas vezes chamada produto escalar entre os vetores v e u . Se $g(v, u) = 0$ dizemos que os vetores v e u são ortogonais em relação a g . Num caso arbitrário um vetor não-nulo v pode ser ortogonal a si próprio, ou seja, $g(v, v) = 0$. Tais vetores são ditos *isotrópicos*.

Um funcional bilinear g é dito simétrico se $g(v, u) = g(u, v)$. Um espaço vetorial equipado com um funcional bilinear simétrico é dito um espaço quadrático. Um funcional bilinear simétrico é completamente determinado pela forma quadrática $Q(v) = g(v, v)$ através do processo de

polarização. De fato, usando a propriedade de bilinearidade para calcularmos $Q(v + u) = g(v + u, v + u)$, podemos escrever

$$g(v, u) = \frac{1}{2}(Q(v + u) - Q(v) - Q(u)).$$

Formalmente, dizemos que uma forma quadrática é um par (V, Q) onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ é a aplicação que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $Q(av) = a^2Q(v)$, $\forall a \in \mathbb{K}, v \in V$
- b) O mapa $g(v, u) = \frac{1}{2}(Q(v + u) - Q(v) - Q(u))$ é bilinear.

Um funcional bilinear é dito *anti-simétrico* quando o denotaremos por σ , se $\sigma(v, u) = -\sigma(u, v)$. Um espaço vetorial equipado com um funcional bilinear anti-simétrico (não-degenerado) é dito um espaço simplético. É imediato que em um espaço simplético todos os vetores são isotrópicos.

► **Obs.13:** É comum definirmos formas quadráticas somente para corpos $\mathbb{K}$ com $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$
◀

Um funcional bilinear $h : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é dito *alternado* quando $h(u, u) = 0$, para todo $u \in V$.

▷ **Ex.70:** Mostre que toda forma bilinear alternada é também anti-simétrica. Prove que quando $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ toda forma bilinear anti-simétrica é também simétrica, e portanto identicamente nula ◀

Definimos o *complemento ortogonal* de um subespaço U (com respeito a g) como sendo o subespaço

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(u, v) = 0, \forall u \in U\}$$

Em particular, $\ker g = V^\perp$.

► **Proposição 7:** Se g é não-degenerada, então

$$\boxed{\dim U^\perp = \dim V - \dim U} \quad \text{e} \quad \boxed{(U^\perp)^\perp = U}$$

◀

Prova: Fixe uma base $\{e_1, \dots, e_k\}$ de U . Então

$$U^\perp = \{v \in V \mid g(e_i, v) = 0, i = 1, 2, \dots, k\}$$

Agora,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i g(e_i, v) = g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i, v\right)$$

e portanto tal combinação linear é nula se e somente se $\lambda_i = 0$, pois g é não-degenerada. Portanto, $\dim U^\perp = n - k$, onde $n = \dim V$. Assim, $\dim (U^\perp)^\perp = n - (n - k) = k = \dim U$. Como $g(u, v) = 0$, se $v \in U$ e $u \in U^\perp$, então $v \in (U^\perp)^\perp$, e portanto $(U^\perp)^\perp = U$ ■

2.3.1 Correlação

Uma correlação é uma aplicação linear $\tau : V \rightarrow V^*$. Uma correlação define naturalmente um funcional bilinear $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ através de

$$g(v, u) = \tau(v)(u)$$

Se $\ker \tau = \{0\}$ a correlação é dita não-degenerada. Dizemos também que V e o funcional bilinear associado a τ são não-degenerados. Como $\dim V = \dim V^*$, se $\ker \tau = \{0\}$ então τ é um isomorfismo, ou seja, uma correlação não-degenerada estabelece um isomorfismo entre um espaço vetorial e o seu dual.

Em um espaço simplético temos que $\sigma(v, u) = -\sigma(u, v)$ e portanto a correlação τ nesse caso satisfaz a relação $\tau(v)(u) = -\tau(u)(v)$.

Ao longo deste texto iremos considerar apenas espaços quadráticos e faremos uso considerável das correlações simétricas $\tau : V \rightarrow V^*$ e $\tau^{-1} : V^* \rightarrow V$. Nesse caso iremos usar uma outra notação para essas correlações:

$$\flat : V \rightarrow V^*, \quad \sharp : V^* \rightarrow V$$

de modo que $\flat = \sharp^{-1}$ e $\sharp = \flat^{-1}$. Estes isomorfismos serão chamados isomorfismos musicais [7]. Escreveremos geralmente

$$v_\flat = \flat(v), \quad \alpha^\sharp = \sharp(\alpha)$$

Por definição temos portanto

$$v^\flat(u) = g(v, u), \quad g(\alpha^\sharp, v) = \alpha(v)$$

Para $v = \sum_i v^i e_i$ e $u = \sum_i u^i e_i$ podemos escrever $g(v, u) = \sum_{ij} g_{ij} v^i u^j$, onde $g_{ij} = g(e_i, e_j) = g_{ji}$. Como $v_\flat(u) = v_{\flat i} u^i$, onde $v_{\flat i}$ são as componentes do covetor $v_\flat$ na base $\{e_i\}$, ou seja, $v_\flat = v_{\flat i} e^i$, segue que $v_{\flat i} = \sum_j g_{ij} v^j$. Equivalentemente temos $e_{i\flat} = g_{ij} e^j$. Nesse sentido, $\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$.

2.4 Dualidade e Adjunta

No Cap.(1) associamos a um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V o seu espaço dual $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$, onde mostramos que $\dim V = \dim V^*$ (se a dimensão de V for finita) e construímos o isomorfismo canônico $\tau : V \rightarrow V^{**}$. Incluiremos agora nesse conceito aplicações lineares, subespaços e espaços quocientes.

Dados $a \in \mathbb{K}$, $\alpha \in V^*$ e $v \in V$, ao invés de denotarmos $\alpha(v)$, usaremos o símbolo $\langle \alpha, v \rangle$, a partir do mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$, o qual podemos provar que é linear em cada um dos seus argumentos:

$$\begin{aligned} \langle a\alpha_1 + \alpha_2, v \rangle &= a\langle \alpha_1, v \rangle + \langle \alpha_2, v \rangle \\ \langle \alpha, v_1 + av_2 \rangle &= \langle \alpha, v_1 \rangle + a\langle \alpha, v_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.2)$$

Vimos que, com essa notação,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

onde os covetores $\{e^i\}$ formam uma base para V^* , enquanto que $\{e_i\}$ é base de V . O mapa $\tau : V \rightarrow V^{**}$ pode ser definido pela condição $\langle \tau(v), \alpha \rangle = \langle \alpha, v \rangle$, e já que V e V^{**} são canonicamente isomorfos, então a fórmula $\langle \tau(v), \alpha \rangle = \langle \alpha, v \rangle$ é reescrita como $\langle v, \alpha \rangle = \langle \alpha, v \rangle$, já que nesse sentido V pode ser considerado com o espaço dual a V^* . As bases $\{e_i\}$ e $\{e^j\}$ formam um par dual e essa relação é simétrica.

► **Obs.14:** Denotaremos $\alpha \in V^*$ por $v_b = \tau(v) \in V^*$, o que implicitamente implica que estamos fazendo uso de uma métrica em V , ou seja, essa identificação necessita que V precise ser munido de um produto interno, e portanto o mapa $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}$ corresponde ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ induzido por uma métrica em V ◀

2.4.1 Aplicações Duais

Seja $\phi : W \rightarrow V$ uma aplicação linear entre $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais W e V . Mostraremos que existe um único mapa linear $\phi^* : V^* \rightarrow W^*$ — denominado *adjunta* — que satisfaz

$$\boxed{\langle \phi^*(v_b), u \rangle = \langle v_b, \phi(u) \rangle} \quad \forall v_b \in V^*, u \in W$$

De agora em diante está implícito que o espaço vetorial é munido de uma métrica, e denotaremos a relação acima por $\langle \phi^*(v), u \rangle = \langle v, \phi(u) \rangle$.

Tal aplicação é única. Com efeito, suponha que há dois mapas ϕ_1^* e ϕ_2^* . Então $\langle \phi_1^*(v), u \rangle = \langle \phi_2^*(v), u \rangle, \forall u, v \in V$. Segue-se que $\langle (\phi_1^* - \phi_2^*)(v), u \rangle = 0$. Fixando-se v e variando-se u , temos que o funcional linear $(\phi_1^* - \phi_2^*)(v) \in W^*$ se anula em todos os vetores de V , e portanto, $\phi_1^* - \phi_2^* = 0$, o que implica que $\phi_1^* = \phi_2^*$.

Existência de ϕ^ .* Fixamos v e consideramos $\langle v, \phi(u) \rangle$ uma função em W . A linearidade de ϕ e a bilinearidade de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ implica que $(v, \phi(u))$ é linear, e portanto pertence a W^* . Denotamos $\langle v, \phi(u) \rangle = \tilde{\phi}^*(v)$. Da linearidade de $(v, \phi(u))$ segue-se que

$$\tilde{\phi}^*(v_1 + v_2) = \tilde{\phi}^*(v_1) + \tilde{\phi}^*(v_2), \quad \tilde{\phi}^*(av) = a\tilde{\phi}^*(v)$$

sendo ϕ^* portanto linear.

Considere agora bases ortonormais de $W = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $V = \{f_1, \dots, f_m\}$ e suas respectivas bases duais de W^* e V^* . Considere A a matriz correspondente de ϕ nessas bases. Então a matriz de ϕ^* é A^t . Com efeito,

$$Ae_j = \sum_{l=1}^m A_{lj}f_l, \quad A^*f_i = \sum_{k=1}^n B_{ki}e_k$$

Como ambas as bases são ortonormais, temos para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} B_{ji} &= \sum_{k=1}^n B_{ki}e^k(e_j) = \left\langle \sum_{k=1}^n B_{ki}e_k, e_j \right\rangle \\ &= \langle A^*f_i, e_j \rangle = \langle f_i, Ae_j \rangle = \left\langle f_i, \sum_{l=1}^m A_{lj}f_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^m A_{lj} \langle f_i, f_l \rangle = \sum_{l=1}^m A_{lj}f^j(f_i) = \sum_{l=1}^m A_{lj}\delta_i^j \\ &= A_{ij} \end{aligned} \tag{2.3}$$

► **Teorema 19:** *Sejam $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}(W, V)$ e $h \in \text{Hom}(V, Z)$, onde V, W, Z são $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, e $a \in \mathbb{K}$. Então*

$$\begin{array}{lll} a) (\phi_1 + \phi_2)^* = \phi_1^* + \phi_2^*, & b) (a\phi)^* = a\phi^*, & c) (h\phi)^* = \phi^*h^* \\ d) I^* = I, & e) 0^* = 0, & f) \phi^{**} = \phi \quad \blacktriangleleft \end{array}$$

▷ **Ex.71:** Prove o Teorema anterior ◀

► **Teorema 20:** *Seja (V, g) um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial munido de uma métrica, $\dim V = n$. Para todo subespaço vetorial $U \subseteq V$ é possível cindir $V = U \oplus U^\perp$ ◀*

Prova: Tome $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V , onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ ($k \leq n$) — quando U é subespaço próprio de V temos que $k < n$ — é base ortonormal de U . Estendendo-se a base $\{e_1, \dots, e_k\}$ de U à base de V $\{e_1, \dots, e_n\}$ (pelo processo de Gram-Schmidt), temos que a base $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ de $U^\perp$ é ortonormal e cada vetor dessa base é ortogonal a U , o que implica que $V = U \oplus U^\perp$, pois $U \cap U^\perp = \{0\}$ ■

► **Definição 7:** Dizemos que um subespaço $U \subset V$ é não-degenerado com respeito a uma função bilinear B se $B|_U$ for não-degenerada ◀

► **Obs.15:** Provamos que o Teorema vale quando V é munido de uma métrica, ou seja, uma forma bilinear simétrica não-degenerada. A propriedade de ser não-degenerada é crucial, uma vez que $U \cap U^\perp = \ker \alpha|_U$. Se $U \cap U^\perp = \{0\}$, então $\ker B|_U = \{0\}$, e portanto a cisão $V = U \oplus U^\perp$ só é possível se o espaço quadrático (V, B) for não-degenerado ◀

▷ **Ex.72:** Prove que $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, onde V, W são $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais de dimensão finita munidos de uma métrica, então $\ker \phi^* = \text{Im}(\phi)^\perp$, $\ker \phi = \text{Im}(\phi^*)^\perp$, $\text{Im}(\phi) = \ker(\phi^*)^\perp$ e $\text{Im}(\phi^*) = \ker(\phi)^\perp$. (Dica: use que $\phi^{**} = \phi$ e $W^{\perp\perp} = W$) ◀

Dizemos que $\phi \in \text{End}(V)$ é auto-adjunto se

$$\langle \phi(v), u \rangle = \langle v, \phi(u) \rangle \quad \forall u, v \in V$$

▷ **Ex.73:** Mostre que se $\phi, \psi \in \text{End}(V)$ são auto-adjuntos, então $\phi\psi$ é auto-adjunto se, e somente se, $\phi\psi = \psi\phi$ ◀

► **Teorema 21:** *Se um subespaço $U \subset V$ é invariante por $\phi \in \text{End}(V)$, então $U^\perp$ é invariante por $\phi^* \in \text{End}(V^*)$ ◀*

Prova: Dados $u \in U$ e $v \in U^\perp$, então $\phi(u) \in U$. Então, $\langle u, \phi^*(v) \rangle = \langle \phi(u), v \rangle = 0$, portanto $\phi^*(v) \in U^\perp$ e portanto $U^\perp$ é invariante por ϕ^* ■

No caso de formas bilineares anti-simétricas $\sigma : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, denominamos uma base $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ *simplética* (com respeito a σ) se

$$\begin{aligned} \sigma(e_{2k-1}, e_{2k}) &= \sigma(e_{2k}, e_{2k-1}) = 1, & k &= 1, \dots, m \\ \sigma(e_i, e_j) &= 0, & \text{para todos os outros casos possíveis.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Em outras palavras, nesta base a matriz de σ é dada por

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \\ & 0 & & & 0 & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

onde o número de blocos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ na diagonal é m .

► **Teorema 22:** Para toda forma quadrática anti-simétrica em V ($\dim V = n$) existe uma base simplética ◀

Prova: Indução em n . Para $n = 1$ não há nada a se mostrar. Seja $n > 1$. Se $\sigma \equiv 0$ também não há nada a se mostrar. Se $\sigma \neq 0$, existem vetores e_1, e_2 tais que $\sigma(e_1, e_2) \neq 0$, que podem ser normalizados de modo que $\sigma(e_1, e_2) = 1 = -\sigma(e_2, e_1)$. A matriz de $\sigma|_{\langle e_1, e_2 \rangle}$ tem a forma $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ na base $\{e_1, e_2\}$, e em particular é não-singular. Pelo Teorema, é possível escrever $V = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^\perp$. Por indução, existe uma base simplética $\{e_3, e_4, \dots, e_n\}$ em $\langle e_1, e_2 \rangle^\perp$. Portanto eis a base simplética de V : $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots, e_n\}$ ■

Um dos objetivos principais do formalismo de operadores lineares é reduzir a matriz de uma aplicação linear à sua forma mais simples, a partir da escolha de uma base particular. Para tanto é preciso saber um pouco mais sobre subespaços invariantes.

► **Definição 8:** Um vetor $0 \neq v \in V$ é dito ser um autovetor de um operador $\phi \in \text{End}(V)$ se $\phi(v) = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{K}$, que por sua vez é um autovalor associado ao vetor v ◀

Obviamente, um vetor $0 \neq v \in V$ é autovetor se, e somente se o subespaço $\langle v \rangle$ de uma dimensão é invariante. Em uma base de autovetores — se essa base existir — a matriz associada à aplicação linear é diagonal.

▷ **Exemplo 14:** Para o operador de derivada no espaço de polinômios na variável x , o único autovetor (módulo multiplicação por escalar) é o polinômio $P(x) = 1$, com autovalor correspondente $\lambda = 0$. Neste caso não existe base de autovetores ◀

▷ **Ex.74:** Mostre que os autovetores do operador $\Pi(\alpha)$, com $\alpha \neq k\pi$ no espaço 3-dimensional são os vetores sobre o eixo de rotação (e seu autovalor correspondente 1). Verifique que, quando $\alpha = k\pi$, os vetores ortogonais ao eixo de rotação também são autovetores, com autovalores $(-1)^k$ ◀

Um autovetor com autovalor λ existe se, e somente se o operador $\phi - \lambda I$ for singular. Com efeito, $\phi(v) = \lambda v$ implica em $(\phi - \lambda I)v = 0$, isso ocorrendo quando $0 \neq v \in \ker(\phi - \lambda I)$, ou seja, quando não existir inverso de $(\phi - \lambda I)$. Portanto, quando $\det(\phi - \lambda I) = 0$.

► **Definição 9:** Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, e considere $\phi \in \text{End}(V)$ com a matriz A associada em alguma base de V . Denotamos por $P(t)$ (ou $P_\phi(t)$) o polinômio $\det(A - tI)$ com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$, que é denominado polinômio característico do operador ϕ e da matriz A ◀

▷ **Ex.75:** Calcule os possíveis autovalores de uma projeção $\phi \in \text{End}(V)$, $\phi^2 = \phi$ ◀

▷ **Ex.76:** Mostre que dadas duas matrizes $A, B \in M(n, \mathbb{K})$, os autovalores de AB e BA são os mesmos, se A ou B for invertível. ◀

▷ **Ex.77:** Calcule os autovalores da aplicação de permutação $\phi \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$ tal que $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$, onde $x_i \in \mathbb{C}$ ◀

▷ **Ex.78:** Seja $u, v \in V$ dois autovetores da aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ correspondentes a autovalores distintos. Mostre que $au + bv$ ($a, b \in \mathbb{K}$) não pode ser um autovetor de ϕ ◀

► **Teorema 23:** a) O polinômio característico de ϕ independe da escolha da base na qual a matriz associada A é representada.

b) Qualquer autovalor de ϕ é raiz de $P(t)$ e qualquer raiz de $P(t)$ em $\mathbb{K}$ é um autovalor de ϕ , correspondendo a algum subespaço próprio de V ◀

Prova: a) A matriz de ϕ em uma outra base é escrita como $B^{-1}AB$, onde B é a matriz mudança de base. Portanto

$$\begin{aligned}\det(B^{-1}AB - tI) &= \det(B^{-1}(A - tI)B) = (\det B)^{-1} \det(A - tI) \det B \\ &= \det(A - tI)\end{aligned}$$

Notamos que $P(t) = t^n - (\text{Tr } A)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$.

b) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ uma raiz de $P(t)$. O mapa $\phi - \lambda I$ é representado por uma matriz singular e portanto seu núcleo é não-trivial. Seja $v \neq 0$ um elemento de $\ker(\phi - \lambda I)$. Então $\phi(v) = \lambda v$ e portanto λ é autovalor de ϕ e v o respectivo autovetor. Reciprocamente, se $\phi(v) = \lambda v$, então $v \in \ker(\phi - \lambda I)$ e portanto $\det(\phi - \lambda I) = P(\lambda) = 0$ ■

Um operador linear sobre um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial pode não ter autovetores. Contudo o uso dos números complexos nos permite obter informações valiosas sobre aplicações lineares sobre o corpo dos reais, com o recurso da *complexificação*.

▷ **Ex.79:** Calcule os autovalores de cada uma das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◀

Seja V um espaço vetorial real. Um espaço vetorial $V_{\mathbb{C}}$ é construído tomando-se pares (u, v) , onde $u, v \in V$ e definindo a adição e multiplicação por complexos de tais pares como:

$$\begin{aligned}(u_1, v_1) + (u_2, v_2) &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2), \\ (a + ib)(u, v) &= (au - bv, bu + av), \quad a, b \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Por definição, a adição de pares do tipo $(u, 0)$ e sua multiplicação por números reais provém das operações correspondentes sobre a primeira componente do par ordenado. Identificamos $V \ni u = (u, 0)$, tendo portanto a imersão $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}$. Além disso, $(u, v) = u + iv$, e toda base de V sobre $\mathbb{R}$ é também base de $V_{\mathbb{C}}$ sobre $\mathbb{C}$.

Qualquer operador linear $\phi \in \text{End}(V)$ pode ser unicamente estendido ao operador $\phi_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$.

► **Lema 2:** Um vetor $u + iv$, $u, v \in V$, é um autovetor de um operador $\phi_{\mathbb{C}}$ com autovalor $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) se, e somente se, $U = \langle u, v \rangle \subset V$ é um subespaço invariante bidimensional de ϕ e

$$\begin{aligned}\phi(u) &= au - bv \\ \phi(v) &= bu + av\end{aligned}\tag{3.2}$$

◀

Prova: Na base $\{u, v\}$, o operador $\phi|_U$ tem a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, e as Eqs.(3.2) implicam que o vetor $u - iv$ é autovetor de $\phi_{\mathbb{C}}$ com autovalor $a - ib$ ■

Como corolário do Lema anterior, temos o

► **Teorema 24:** *Toda aplicação linear $\phi \in \text{End}(V)$ sobre o corpo dos reais possui um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2* ◄

Prova: O polinômio característico sempre possui raízes em $\mathbb{C}$ ■

Para um dado autovalor λ , os autovetores correspondentes podem ser encontrados a partir do sistema homogêneo de equações $(A - \lambda I)X = 0$, onde X denota a matriz coluna de componentes do vetor a ser encontrado. Juntamente com o vetor nulo, os autovetores associados ao autovalor λ constituem o subespaço

$$V_{\lambda}(\phi) = \ker(\phi - \lambda I)$$

denominado *autoespaço* da aplicação ϕ correspondente ao autovalor λ . A dimensão de V_{λ} é $(n - \dim \text{Im}(\phi - \lambda I))$, e $n = \dim V$.

Provaremos agora um caso mais geral do teorema que afirma que a autovalores diferentes do mesmo operador correspondem autovetores L.I.:

► **Teorema 25:** *Autoespaços correspondentes a autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de uma aplicação ϕ são L.I.* ◄

Prova: Indução em k . Para $k = 1$ não há nada a se provar. Suponha que $k > 1$ e seja

$$a_1 e_1 + \dots + a_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k = 0, \quad e_i \in V_{\lambda_i}(\phi), \quad a_i \in \mathbb{K}.$$

Aplicando-se ϕ na equação acima, obtemos

$$a_1 \lambda_1 e_1 + \dots + a_{k-1} \lambda_{k-1} e_{k-1} + a_k \lambda_k e_k = 0$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, multiplicada por λ_k , obtemos

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_k) e_1 + \dots + a_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) e_{k-1} = 0$$

Pela hipótese de indução, $a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$. Portanto $a_k = 0$ ■

Como Corolário, podemos afirmar que

► **Teorema 26:** *Se o polinômio característico $P_{\phi}(t)$ possui n raízes distintas, então existe uma base de autovetores de ϕ* ◄

▷ **Ex.80:** Mostre que se $\dim(V) = n$, e se $\phi \in \text{End}(V)$ possui n autovalores distintos, então existe uma base de V em relação a qual a matriz associada a ϕ é diagonal ◄

▷ **Exemplo 15:** Seja $V = U \oplus W$. O operador de projeção $P \in \text{End}(V)$ definido como

$$P(u + w) = u, \quad u \in U, \quad w \in W$$

é a projeção de U ao longo de W . Obviamente, os autoespaços são dados por $V_0(P) = W$ e $V_1(P) = U$. Na base de V obtida das bases de U e W , a matriz de P é diagonal com 0's e 1's na diagonal ◄

▷ **Ex.81:** Seja $V = U \oplus W$. O operador de reflexão $R \in \text{Hom}(V, V)$ definido como

$$R(u + w) = u - w, \quad u \in U, w \in W$$

é a reflexão de U ao longo de W . Obviamente, os autoespaços são dados por $V_1(R) = W$ e $V_{-1}(R) = U$. Na base de V obtida das bases de U e W , a matriz de R é diagonal com 1's e (-1)'s na diagonal. Mostre que um operador $\phi \in \text{Hom}(V, V)$ é reflexão se, e somente se $\phi^2 = I$ ◁

▷ **Ex.82:** Mostre que $P_{\phi^*}(t) = P_{\phi}(t)$ ◁

A fim de obtermos condições necessárias e suficientes à existência de uma base que consista de autovetores de uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$, precisamos provar o seguinte lema:

► **Lema 3:** O polinômio característico da restrição $\phi|_U$ de uma aplicação linear $\phi \in \text{End}(V)$ a um subespaço invariante $U \subset V$ divide o polinômio característico de ϕ ◀

Prova: Sejam A e $A|_U$ as representações de $\phi \in \text{End}(V)$ em $M(n, \mathbb{K})$. Numa base de V , onde os primeiros k vetores formam uma base de U , a matriz A de ϕ é da forma dada na Eq.(2.1). Portanto

$$P_A(t) = P_{A|_U}(t) \cdot \det(C - tI) \quad \blacksquare$$

▷ **Corolário 3:** Como Corolário, podemos afirmar que a dimensão de um autoespaço V_λ de ϕ — também chamada de *multiplicidade geométrica* de λ — nunca excede à multiplicidade de λ no polinômio característico — também chamada de *multiplicidade algébrica* de λ ◁

Prova: Seja $\dim V_\lambda(\phi) = k$. O polinômio característico de $\phi|_U$ é dado por $(t - \lambda)^k$. Aplicando o Lema anterior ao subespaço $U = V_\lambda(\phi)$, temos portanto $P_\phi(t) = (t - \lambda)^k \det(C - tI)$. Supondo por absurdo que a multiplicidade geométrica fosse maior que a multiplicidade algébrica de λ , teríamos que $\dim V_\lambda(\phi) > k$, e portanto o polinômio característico de $\phi|_U$ seria dado por $(t - \lambda)^j$, para algum $j > k$. Assim completamos a prova ◼

▷ **Exemplo 16:** Diferenciação é um operador linear no espaço dos polinômios $\mathbb{K}_n[x]$. Na base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, o operador de derivação possui a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto o polinômio característico associado é t^{n+1} , que possui raiz $\lambda = 0$ e multiplicidade $n + 1$, mas a dimensão do autoespaço correspondente é 1. Isso mostra que a dimensão do autoespaço pode ser estritamente menor que a multiplicidade da raiz correspondente no polinômio característico ◁

O conjunto de todas as raízes do polinômio característico é chamado *espectro* da aplicação ϕ , e se todas as multiplicidades algébricas forem iguais a um, o espectro é dito *simples*.

Uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ em geral não possui autovalores (e portanto não é diagonalizável) se seu polinômio característico $P(t)$ não possui raiz no corpo $\mathbb{K}$. Por exemplo, considere a

matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com coeficientes reais. Então $\det(A - tI) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc)$, e se $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$, então a matriz não é diagonalizável. Portanto consideramos de agora em diante — até o fim desta Seção — corpos algebricamente fechados ($\mathbb{K} \simeq \mathbb{C}$), o que significa que qualquer polinômio $P(t)$ de grau maior ou igual a um — com coeficientes em $\mathbb{K}$ — possui uma raiz em $\mathbb{K}$.

► **Teorema 27:** *Para que uma base de autovetores de uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ exista, é necessário e suficiente que as seguintes condições sejam válidas:*

a) *o polinômio característico $P_\phi(t)$ cinde em fatores lineares.*

b) *a dimensão de qualquer autoespaço é igual à multiplicidade algébrica da raiz correspondente do polinômio $P_\phi(t)$* ◀

Prova: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ todas as raízes de $P_\phi(t)$ com multiplicidades (algébricas) $k_1, \dots, k_s$, respectivamente. Denotando por V_i o autoespaço correspondente a λ_i , pela Observação anterior, sabemos que a dimensão de um autoespaço V_i de ϕ nunca excede à multiplicidade de λ_i no polinômio característico, e portanto como $\dim V_i \leq k_i$ segue-se que

$$\sum_i \dim V_i \leq \sum_i k_i \leq n. \quad (3.3)$$

Contudo, a única maneira de obter uma base de autovetores é tomar a união das bases dos autoespaços. Para que tal procedimento nos forneça uma base de V , é necessário e suficiente que $\sum \dim V_i = n$. Mas a desigualdade (3.3) é equivalente à condição $\sum_i k_i = n$ e que $\dim V_i = k_i$ para todo i . Essa condição significa que $P_\phi(t)$ cinde em fatores lineares, enquanto que aquela corresponde à condição b) do enunciado do Teorema ■

▷ **Ex.83:** a) Se $\phi \in \text{End}(V)$ tem λ como autovalor correspondente a um autovetor $v \in V$, mostre que $a\phi$ possui autovalor $a\lambda$, $a \in \mathbb{K}$, e que ϕ^n tem autovalor λ^n associado a v . Se ϕ_1 e ϕ_2 possuem v como autovetor, mostre que v também é autovetor de $a_1\phi_1 + a_2\phi_2$, e use isso para mostrar que v também é autovetor de $P(\phi)$ — um polinômio em ϕ — com autovalor $P(\lambda)$.

b) Mostre que se $\phi \in \text{End}(V)$ tem a propriedade de que ϕ^2 possui λ^2 como autovalor não-negativo, então pelo menos λ ou $-\lambda$ é autovalor de ϕ ◀

▷ **Ex.84:** Calcule os autovalores das matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

os autovetores correspondentes, e a dimensão dos autoespaços correspondentes. Em qual desses espaços os autovetores constituem uma base de $V = \mathbb{R}^3$? ◀

▷ **Ex.85:** Calcule os autovalores das matrizes de Pauli $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ em } M(2, \mathbb{C}). \quad \triangleleft$$

▷ **Ex.86:** Este exercício mostrará uma forte relação entre $SU(2)$ e $SO(3)$. Mostraremos que existe um homomorfismo de grupos ϕ que mapeia $SU(2)$ em $SO(3)$. Considere o espaço vetorial V de todas as matrizes complexas 2×2 auto-adjuntas de traço zero. Esse espaço corresponde ao espaço vetorial *real* 3-dimensional com a seguinte base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Defina o produto interno em V pela expressão $\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB)$.

1. Mostre que é de fato um produto interno.
2. Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de V .
3. Estabeleça um isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^3$.

◁

▷ **Ex.87:** Com relação ao exercício anterior, se U é um elemento de $SU(2)$ e $v \in V$, mostre que $UAU^{-1} \in V$. Portanto para cada $U \in SU(2)$, podemos definir $\phi_U \in \text{End}(V)$ por $\phi_U(v) = UvU^{-1}$. (Esse mapa chama-se representação adjunta). Dados $v, w \in V$, prove que ϕ_U é uma aplicação ortogonal de $V \cong \mathbb{R}^3$, e portanto ϕ_U é um elemento de $O(3)$.

Com isso o mapa $U \mapsto \phi_U$ é um mapa de $SU(2)$ em $O(3)$. Mostre que tal mapa é um homomorfismo de grupos (Basta provar que $\phi_{U_1 U_2} = \phi_{U_1} \phi_{U_2}$) contínuo. Se todo elemento de $O(3)$ possui determinante ± 1 , já que $SU(2)$ é conexo e o mapa $U \mapsto \phi_U$ é contínuo, ϕ_U deve ser um mapa em $SO(3)$. Segue-se que $U \mapsto \phi_U$ é um homomorfismo de grupos (de Lie) de $SU(2)$ em $SO(3)$. Dizemos ainda que $SO(3) \simeq SU(2)/\mathbb{Z}_2$. Mostre que o mapa $U \mapsto \phi_U$ não é injetivo

◁

▷ **Ex.88:** a) Mostre que uma matriz A é não-singular se, e somente se $\lambda = 0$ não é autovalor de A

b) Mostre que se uma matriz A é não-singular e possui autovalores λ_i , os autovalores de A^{-1} são λ_i^{-1} .

c) Dada $A \in M(n, \mathbb{K})$ com entradas reais tal que $A^2 = -I$. Prove que A é não-singular, que n é par, que A não possui autovalores reais e que $\det A = 1$ ◁

► **Teorema 28:** Dados λ_i autovalores dois a dois distintos da aplicação auto-adjunta $\phi \in \text{End}(V)$, seus autovetores correspondentes são dois a dois ortogonais ◀

Prova: Dados $i \neq j$,

$$\begin{aligned} (\lambda_i - \lambda_j) \langle v_i, v_j \rangle &= \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle \\ &= \langle \phi v_i, v_j \rangle - \langle v_i, \phi v_j \rangle \\ &= \langle \phi v_i, v_j \rangle - \langle \phi v_i, v_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ ■

► **Teorema 29:** Para qualquer aplicação auto-adjunta $\phi \in \text{End}(V)$ existe uma base ortonormal de autovetores ◀

Prova: É suficiente mostrar que em um espaço vetorial bidimensional W existe uma base formada pelos autovetores da aplicação auto-adjunta $\phi \in \text{End}(V)$, que possui uma matriz simétrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ em uma base ortonormal $\{u, v\}$. Seu polinômio característico é $p_\phi(t) = t^2 - (a + c)t + ac - b^2$, e correspondentemente $\Delta = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$. Se $\Delta = 0$, então $\phi = aI$, e se $\Delta \neq 0$, $p_\phi(t)$ possui raízes distintas λ_1 e λ_2 , e portanto existem vetores v_1, v_2 tais que $\phi(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $\phi(v_2) = \lambda_2 v_2$. Pelo Teorema anterior $\{v_1, v_2\}$ é base ortonormal de W .

▷ **Ex.89:** Mostre que toda matriz $A \in \text{End}(V)$ pode ser escrita como a soma direta de subespaços formados matrizes simétricas e anti-simétricas. Encontre as projeções da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

nesses subespaços, paralelamente ao subespaço complementar. ◁

Agora, toda aplicação auto-adjunta $\phi \in \text{End}(V)$ (V tem dimensão finita) possui um autovetor, pois pelo Teorema 24 existe um subespaço $U \subset V$ de dimensão 1 ou 2 tal que $\phi(U) \subset U$. Se $\dim U = 1$, então todo vetor $0 \neq u \in U$ é autovetor de ϕ , e se $\dim U = 2$, aplicamos o que foi demonstrado no parágrafo anterior e obtemos um autovetor $v_1 \in U$. Finalmente, a fim de mostrar que existe uma base ortonormal de autovetores de $\phi \in \text{End}(V)$, faremos por indução. Se $\dim V = 1$, é imediato. Supondo que seja verdadeiro para $n - 1$, existe um vetor v_n e portanto um subespaço $U \subset V$ — $\dim U = 1$ — invariante por ϕ . Pelo Teorema 21, o complemento ortogonal $U^\perp$ também é invariante por ϕ , e como $\dim U^\perp = n - 1$, a hipótese de indução afirma que existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ em $U^\perp$ formada por autovetores de $\phi|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$. Portanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base ortonormal de V ■

▷ **Corolário 4:** Afirmamos que para toda função quadrática B no espaço Euclidiano, existe uma base ortonormal onde a matriz é diagonal, i.e., dado $v = \sum_i v_i e_i \in V$, onde $v_i \in \mathbb{K}$ são as componentes de V , temos que

$$B(v, v) = Q(v) = \lambda_1 v_1^2 + \cdots + \lambda_n v_n^2$$

Os λ_i são os correspondentes autovalores de B , definidas a menos de permutação ◁

3.1 Aplicações Ortogonais, simétricas e anti-simétricas

Vimos que para cada aplicação linear $\phi \in \text{End}(V)$, existe uma função bilinear $B_\phi(u, v) = \langle u, \phi(v) \rangle$. A matriz de $B_\phi(u, v)$ na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ coincide com a matriz da aplicação ϕ nessa base, pois $B_\phi(e_i, e_j) = B_\phi^{ij} = \langle e_i, \phi(e_j) \rangle$, que é a i -ésima coordenada do vetor $\phi(e_j)$. Segue-se então o isomorfismo (canônico) $\phi \mapsto B_\phi$ entre o espaço $\text{End}(V)$ e o espaço das funções bilineares em V , decorrendo o

► **Teorema 30:** *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear. Para cada forma bilinear $B : V \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$ existe uma única aplicação linear $\phi \in \text{End}(V)$ tal que*

$$B(u, v) = \langle u, \phi(v) \rangle, \quad \forall u, v \in V \quad (3.4)$$

A aplicação $\phi \mapsto B_\phi$ entre o espaço $\text{End}(V)$ e o espaço das funções bilineares em V . ◀

▷ **Ex.90:** Dados α, β funcionais lineares, mostre que para todos $u, v \in V$, a função

$$(\alpha \otimes_\pm \beta)(u, v) := \frac{1}{2}(\alpha(u)\beta(v) \pm \beta(u)\alpha(v)) \quad (3.5)$$

é bilinear. ◀

Funcionais bilineares simétricos [anti-simétricos] correspondem a aplicações lineares simétricas [anti-simétricas], e duas matrizes associadas satisfazem $A^* = A$ [$A^* = -A$]. Aplicações lineares simétricas são também denominadas auto-adjuntas.

▷ **Ex.91:** Mostre que as formas bilineares dadas pelas Eqs.(3.5) são respectivamente simétricas e anti-simétricas ◀

▷ **Ex.92:** Mostre que uma aplicação que corresponde à projeção ortogonal em um subespaço é simétrica ◀

Operadores lineares $\phi \in \text{End}(V)$ tais que $\phi^* = \phi^{-1}$ são denominados *ortogonais*. Suas matrizes associadas satisfazem a condição $AA^T = I$, e tais aplicações formam um grupo, denominado *grupo ortogonal* e denotado por $O(n, \mathbb{K}) \subset M(n, \mathbb{K})$.

▷ **Ex.93:** Mostre que $O(n, \mathbb{K})$ satisfaz as propriedades de grupo ◀

O grupo geral linear $GL(n, \mathbb{K})$ consiste nas matrizes $n \times n$ quadradas não-singulares sobre o corpo $\mathbb{K}$, enquanto que o grupo $SL(n, \mathbb{K}) < GL(n, \mathbb{K})$ e consiste das matrizes que possuem determinante igual a 1.

O grupo ortogonal especial consiste nas matrizes ortogonais cujo determinante é igual a 1, e portanto $SO(n, \mathbb{K}) = O(n, \mathbb{K}) \cap SL(n, \mathbb{K})$.

O grupo *unitário* $U(n)$ por sua vez consiste nas matrizes $M(n, \mathbb{C})$ que satisfazem a condição $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, onde $A^\dagger$ indica a matriz complexa conjugada transposta, denominada *hermitiana conjugada* da matriz A . Se $A = [a_{ij}]$ então $A^\dagger = [\bar{a}_{ij}]$

▷ **Ex.94:** Mostre que $U(n)$ é um grupo ◀

Uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ é *ortogonal* se

$$\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad (3.6)$$

Como $\langle \phi(u), \phi(v) \rangle = \langle u, \phi^* \phi(v) \rangle$, então ϕ é ortogonal se $\phi^* = \phi^{-1}$.

► **Proposição 8:** Uma aplicação linear auto-adjunta ou anti-auto-adjunta ou ortogonal possui a propriedade de que se um subespaço $U \subset V$ é invariante por $\phi \in \text{End}(V)$, então $U^\perp$ é invariante por ϕ ◀

Prova: O Teorema 21 é usado para mostrar imediatamente a propriedade quando ϕ é auto-adjunta ou anti-auto-adjunta. O caso mais difícil é quando ϕ é ortogonal. Se isso ocorrer, em particular $\phi|_U$ é ortogonal, e portanto não singular, e para todo $u \in U$, existe $v \in U$ tal que $u = \phi(v)$. Considere agora um vetor $w \in U^\perp$. Portanto para todo $u \in U$, temos

$$\langle u, \phi(w) \rangle = \langle \phi(v), \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle = 0$$

e daí $\phi(w) \in U^\perp$ ■

Nos dos Teoremas que se seguem, usaremos na demonstração o fato de que dada $\phi \in \text{End}(V)$, os conjuntos $U_{\pm} = \{v \in V \mid \phi(v) = \pm v\}$ são subespaços invariantes por ϕ , e portanto o subespaço $U = U_+ \oplus U_-$ é também subespaço invariante por ϕ , e portanto $U^{\perp}$ é invariante por ϕ^* , e possui um subespaço de dimensão 1 ou 2.

► **Teorema 31:** *Para todo operador $\phi \in \text{End}(V)$ tal que $\phi^* = -\phi$, existe uma base ortonormal na qual a matriz associada a ϕ tem a forma*

$$\begin{pmatrix} H(a_1) & & & & \\ & H(a_2) & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & H(a_k) & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

onde $H(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ ◀

Prova: A forma matricial de um operador anti-simétrico restrito a um espaço Euclidiano bidimensional em uma base ortonormal é $H(a)$ ■

► **Teorema 32:** *Para todo operador $\phi \in \text{End}(V)$ tal que $\phi^* = \phi^{-1}$, existe uma base ortonormal na qual a matriz associada a ϕ tem a forma*

$$\begin{pmatrix} \Pi(\theta_1) & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \Pi(\theta_k) & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

onde $\Pi(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ◀

Prova: É suficiente considerarmos aplicações em subespaços de dimensão 1 e 2. Em espaços de dimensão 1, aplicações ortogonais é a multiplicação por ± 1 .

Em subespaços de dimensão 2, toda aplicação ortogonal ϕ ou é uma rotação por um ângulo θ ou uma reflexão através de uma linha. Com efeito, dada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ e um vetor $v \in \mathbb{K}^2$ com componentes (x, y) , a condição de ortogonalidade implica que $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = x^2 + y^2$, i.e., $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. A equação $a^2 + c^2 = 1$ implica que existe um ângulo θ tal que $a = \cos \theta$ e $c = \sin \theta$, e portanto $b = \pm \sin \theta$ e $d = \mp \cos \theta$. Segue-se que $\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ou $\phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$, onde a primeira matriz se refere à rotação

através de um ângulo θ e a segunda matriz se refere a uma reflexão através de uma linha que forma um ângulo $\theta/2$ em relação ao eixo- x . Nesse caso existe uma base ortonormal tal que a matriz de ϕ tem a forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ■

▷ **Ex.95:** Mostre que uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ que é simultaneamente auto-adjunta e ortogonal é também uma involução ◁

▷ **Ex.96:** Mostre que uma aplicação $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ ortogonal preserva norma e distância ◁

3.2 Espaços Euclidianos e Hermitianos

Um espaço Euclidiano $(V, \mathbf{g})$ é um $\mathbb{R}$ -espaço vetorial munido de uma forma bilinear simétrica positiva definida $\mathbf{g} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, ou produto interno.

▷ **Exemplo 17:** O espaço $\mathbb{R}^n$ com o produto interno $\mathbf{g}(u, v) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, onde $u = (x_1, \dots, x_n)^T, v = (y_1, \dots, y_n)^T$ ◁

O comprimento do vetor $v \in V$ é dado por $\|v\| = \sqrt{\mathbf{g}(v, v)}$

▷ **Ex.97:** Dados $u, v \in V$, onde V é Euclidiano, mostre a desigualdade de Cauchy-Schwarz $\|\mathbf{g}(u, v)\| \leq \|u\| \|v\|$ ◁

Dizemos que dois espaços Euclidianos V e W são isomorfos se existe uma bijeção $\phi : V \rightarrow W$ que é um isomorfismo de espaços vetoriais e satisfaz a condição $\mathbf{g}(\phi(u), \phi(v)) = \mathbf{g}(u, v), \forall u, v \in V$.

▷ **Ex.98:** Mostre que dois espaços vetoriais Euclidianos de mesma dimensão (finita) são isomorfos ◁

Passando para o corpo dos complexos, não existem funções quadráticas positivas definidas em um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial, o que pode ser contornado através da introdução das formas sesquilineares. Uma função $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é sesquilinear se é linear no segundo argumento e anti-linear no primeiro:

$$\begin{aligned}\psi(av_1 + v_2, u) &= \bar{a}\psi(v_1, u) + \psi(v_2, u) \\ \psi(u, av_1 + v_2) &= a\psi(u, v_1) + \psi(u, v_2)\end{aligned}$$

Considerando $\{e_i\}$ uma base de V , enquanto que uma forma bilinear $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ é determinada pelos escalares $b_{ij} = B(e_i, e_j) \in \mathbb{K}$ por $B(u, v) = \sum_{i,j} b_{ij}u_iv_j$, onde $v = \sum_i v_ie_i, u = \sum_i u_ie_i \in V$, uma forma sesquilinear $\psi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ é determinada pelos escalares $\psi_{ij} = \psi(e_i, e_j) \in \mathbb{C}$ por $\psi(u, v) = \sum_{i,j} \psi_{ij}\bar{u}_iv_j$, onde $v = \sum_i v_ie_i, u = \sum_i u_ie_i \in V$.

Uma forma sesquilinear ψ é hermitiana [anti-hermitiana] se $\psi(u, v) = \overline{\psi(v, u)}$ [$\psi(u, v) = -\overline{\psi(v, u)}$], onde $\bar{a}$ denota a conjugação complexa de $a \in \mathbb{K}$.

▷ **Ex.99:** Exiba um operador que mapeia formas hermitianas em formas anti-hermitianas ◁

▷ **Ex.100:** Mostre que uma forma quadrática hermitiana $Q(v) = \psi(v, v)$ é sempre real ◁

Sobre o corpo dos complexos sempre temos que $\det \phi^* = \overline{\det \phi}$.

Se a aplicação ϕ possui uma matriz A associada em alguma base ortonormal, então na mesma base a aplicação ϕ^* tem a matriz $\bar{A}^T = A^\dagger$. Uma aplicação é dita ser hermitiana, anti-hermitiana ou unitária se respectivamente $\phi^* = \phi$, $\phi^* = -\phi$ ou $\phi^* = \phi^{-1}$.

▷ **Ex.101:** Mostre que os autovalores de aplicações hermitianas, anti-hermitianas e unitárias são respectivamente reais, imaginários puros e escalares de módulo 1 ◁

▷ **Ex.102:** Determine quais das seguintes matrizes são simétricas, anti-simétricas, hermitianas ou anti-hermitianas:

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4i \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.103:** Considere $0 \neq a \in \mathbb{R}$ e seja $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. Ache um conjunto ortonormal de autovetores de A . ◁

▷ **Ex.104:** Se $\phi \in \text{End}(V)$ é unitária e hermitiana mostre que ϕ é uma involução ◁

▷ **Ex.105:** Quando o produto de duas aplicações hermitianas é também hermitiano? ◁

Mais geralmente, dada agora uma forma sesquilinear não-degenerada $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, então a menos de uma constante, B ou é alternada ($\forall v \in V \ B(v, v) = 0$) ou é hermitiana ($B(v, w) = B(w, v)^\sigma$) onde $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ de ordem 2, ou B é simétrica $B(v, w) = B(w, v)$. A definição $B(v, v) = 0$ é preferível a $B(v, w) = -B(w, v)$, pois já vimos que a segunda possui problemas quando $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$. Em qualquer caso onde $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ as duas propriedades são equivalentes.

Em analogia à teoria de grupos, o grupo de matrizes $\text{GL}(V)$ age em V como multiplicação à esquerda. Dada $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, definimos $\text{Isom}(B) = \{\phi \in \text{GL}(V) \mid B(\phi(u), \phi(v)) = B(u, v), \forall u, v \in V\}$ o grupo de isometria de B em $\text{GL}(V)$.

▷ **Ex.106:** Mostre que $\text{Isom}(B)$ é um subgrupo de $\text{GL}(V)$ ◁

▷ **Ex.107:** Mostre que podemos alternativamente definir $\text{Isom}(B) = \{\phi \in \text{GL}(V) \mid B(\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v)) = B(u, v), \forall u, v \in V\}$ ◁

Também há somente três tipos de grupos de isometria, cada um deles correspondendo às respectivas formas sesquilineares. São eles:

- a) Grupo simplético $\text{Sp}(V, B)$ se B é alternada.
- b) Grupo unitário $\text{U}(V, B)$ se B é hermitiana.
- c) Grupo ortogonal $\text{O}(V, B)$ se B é simétrico.

Denominamos o espaço vetorial V munido de B também por simplético, unitário e ortogonal, baseado na classificação da forma bilinear.

▷ **Ex.108:** Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se $J(a + ib) = a - ib$, então $J \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ e J é involução ◁

Um grupo clássico é derivado desses três grupos acima e do grupo linear geral $\text{GL}(V)$, e é possível expressar as representações desses grupos clássicos em forma de matrizes.

Já vimos que dados $\phi \in \text{End}(V)$ e $B : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, então existe a correspondência $B_\phi(u, v) = \langle u, \phi(v) \rangle$. No caso mais simples onde $B = I$, temos que $B(u, v) = u^T v$ é o produto interno usual, somente sem (talvez) a usual propriedade de ser positiva definida que somente faz sentido para corpos ordenados, como $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

O grupo de isometria de I é exatamente o grupo das matrizes invertíveis A onde $A^T I A = I \Leftrightarrow A^T A = I$ e é comum denotarmos por $O(n)$ o grupo ortogonal sobre $\mathbb{R}$

$$O(n) = \{A \in GL(n) \mid A^T A = I\}$$

Para grupos simpléticos temos que levar em conta a forma bilinear correspondente à matriz $\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$, e a condição de isometria para uma forma alternada $B(\phi(u), \phi(v)) = u^T A^T \mathcal{J} A v = u^T \mathcal{J} v = B(u, v)$, e portanto $A^T \mathcal{J} A = \mathcal{J}$. É comum definirmos

$$Sp(2m) = \{A \in GL(2m) \mid A^T \mathcal{J} A = \mathcal{J}\}$$

▷ **Ex.109:** Mostre que $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ e $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(3)$ ◁

▷ **Ex.110:** Mostre que se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e satisfazem $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, então a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

está em $SU(2)$. Mostre que toda matriz $A \in SU(2)$ pode ser expressa na forma (3.7) para um único par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ satisfazendo $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Dessa maneira $SU(2)$ é uma esfera S^3 em $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ e em particular mostra que $SU(2)$ é conexo e simplesmente conexo. ◁

4.1 Forma Canônica de Jordan

Vimos que algumas matrizes associadas a operadores lineares — simétricas, hermitianas e unitárias — podem ser dispostas na sua forma diagonal. Em geral, existem obstruções a tal redução descrita no Teorema 27.

Demonstração: quaquaqu ■ Primeiramente o polinômio característico pode não cindir em fatores lineares, ou seja, ele pode apresentar menos que n raízes. Isso não ocorre com aplicações lineares sobre $\mathbb{C}$, e quando a aplicação é sobre $\mathbb{R}$ utilizamos o recurso da complexificação.

A segunda obstrução à redução de uma matriz a sua forma diagonal é que um autoespaço pode ter dimensão estritamente menor que a correspondente raiz no polinômio característico. Não podemos nesse caso reduzir a matriz da aplicação à sua forma diagonal, contudo se o polinômio característico ainda cindir em fatores lineares (o que sempre acontece quando trabalhamos sobre o corpo dos complexos ($\mathbb{C}$)), a matriz poderá ser reduzida a sua forma canônica de Jordan.

► **Definição 10:** Dizemos que $\phi \in \text{End}(V)$ é *nilpotente* se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k = 0$. Uma matriz $A \in M(n, \mathbb{K})$ é nilpotente se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0 \in M(n, \mathbb{K})$. O menor número $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k = 0$ (i.e., $\phi^k = 0, \phi^{k-1} \neq 0$) é denominado *peso* do operador nilpotente¹ ◀

▷ **Ex.111:** Se $\phi = d/dx \in \text{Hom}(\mathbb{K}_n[x])$ mostre que $\phi^n = 0$ (veja Exemplo 15). Se $A \in M(n, \mathbb{K})$, $A = [a_{ij}] = 0$ sempre que $i \geq j$, mostre que $A^n = 0$ ◀

► **Definição 11:** Um vetor raiz de um operador linear ϕ , correspondendo a um número $\lambda \in \mathbb{K}$, é um vetor $v \in V$ tal que

$$(\phi - \lambda I)^m v = 0$$

para algum $m \in \mathbb{N}$. O menor valor de m tal que isso ocorra é chamado de peso do vetor raiz v ◀

Em particular, autovetores são vetores raízes de peso 1.

▷ **Exemplo 18:** Considere o operador de diferenciação $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Os autovetores correspondentes a λ são funções proporcionais a $e^{\lambda x}$, e os vetores raízes são funções da forma $p(x)e^{\lambda x}$, onde $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. O peso de tal vetor raiz é igual a $\deg p + 1$, onde $\deg p$ é o grau do polinômio $p(x)$. Em particular, polinômios são vetores raízes correspondentes a $\lambda = 0$. ◀

¹Em alguns livros e notas denomina-se também de índice do operador nilpotente o menor número $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^k = 0$. Como já denominamos na Definição 4 por índice de um operador ϕ o número $\text{ind } \phi = \dim \text{coker } \phi - \dim \ker \phi$, preferimos utilizar o termo *peso* aqui.

Se v é um vetor raiz com peso $m > 0$, então o vetor

$$f = (\phi - \lambda I)^{m-1}v$$

é autovetor de ϕ com autovalor λ , e portanto λ é raiz do polinômio característico.

▷ **Ex.112:** Prove a afirmação anterior ◁

▷ **Ex.113:** Mostre que o espaço dos vetores raízes correspondentes a uma raiz λ é um subespaço vetorial de V ◁

Tal subespaço é denominado *subespaço de raízes* e denotado por $V^\lambda(\phi) = \{v \in V \mid (\phi - \lambda I)^m v = 0\}$.

▷ **Ex.114:** Mostre que $V_\lambda(\phi) \subset V^\lambda(\phi)$ ◁

▷ **Ex.115:** Mostre que $V_\lambda(\phi)$ é o subespaço vetorial de $V^\lambda(\phi)$ formado pelos vetores raízes de peso igual a um ◁

Se $v \in V$ é um vetor raiz de peso $m > 0$, então $(\phi - \lambda I)v$ é vetor raiz de peso $m - 1$.

► **Lema 4:** O subespaço de raízes $V^\lambda(\phi)$ é invariante sob a ação de $\phi - \lambda I$ e portanto, invariante por ϕ ◀

Prova: Se $u \in V^\lambda(\phi)$ então $(\phi - \lambda I)^m u = 0$, e portanto $(\phi - \lambda I)^m [(\phi - \lambda I)u] = (\phi - \lambda I)[(\phi - \lambda I)^m u] = 0$, o que significa que o subespaço raiz $V^\lambda(\phi)$ é invariante sob a ação de $(\phi - \lambda I)$. Como provamos que $V^\lambda(\phi)$ é $(\phi - \lambda I)$ -invariante, para cada $v \in V^\lambda(\phi)$, existe $u \in V^\lambda(\phi)$ tal que $(\phi - \lambda I)(v) = u$, e portanto $\phi(v) = \lambda v + u$, o que implica em $\phi(v) \in V^\lambda(\phi)$, pois como $u, v \in V^\lambda(\phi)$ e $V^\lambda(\phi)$ é subespaço vetorial, então $\lambda v + u \in V^\lambda(\phi)$ ■

O conjunto de vetores raiz de peso $\leq m$ formam o núcleo da aplicação $(\phi - \lambda I)^m$.

▷ **Ex.116:** Mostre que $\ker(\phi - \lambda I) \subset \ker(\phi - \lambda I)^2 \subset \ker(\phi - \lambda I)^3 \subset \dots$ ◁

No caso onde $\dim V = n$ a cadeia ascendente acima se estabiliza e

$$V^\lambda(\phi) = \ker(\phi - \lambda I)^m, \quad \text{para algum } m \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

► **Lema 5:** O conjunto $\{v, (\phi - \lambda I)v, (\phi - \lambda I)^2 v, \dots, (\phi - \lambda I)^{m-1} v\}$ é L.I. ◀

Prova: Sendo o peso de v igual a m , dada a combinação linear $a_1 v + a_2 (\phi - \lambda I)v + a_3 (\phi - \lambda I)^2 v + \dots + a_{m-1} (\phi - \lambda I)^{m-1} v = 0$, agimos a aplicação $(\phi - \lambda I)^{m-1}$ na equação acima, e obtemos que $a_1 = 0$. Fazendo agora a ação de $(\phi - \lambda I)^{m-2}$ sobre tal equação, segue-se que $a_2 = 0$ e assim provamos que $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$. ■

Por outro lado o conjunto $\{v, (\phi - \lambda I)v, (\phi - \lambda I)^2 v, \dots, (\phi - \lambda I)^{m-1} v\}$ gera $V^\lambda(\phi)$ e portanto é uma base de $V^\lambda(\phi)$.

Nesta base, ao denominarmos

$$\begin{aligned} u_1 &= v \\ u_2 &= (\phi - \lambda I)v \\ u_3 &= (\phi - \lambda I)^2 v \\ \dots &= \dots \\ u_m &= (\phi - \lambda I)^{m-1} v \end{aligned}$$

temos que $(\phi - \lambda I)u_{k-1} = u_k$ para todo $k \in \{2, \dots, m\}$. Portanto a matriz associada a $(\phi - \lambda I)|_{V^\lambda(\phi)}$ pode ser escrita (na base $\{v, (\phi - \lambda I)v, (\phi - \lambda I)^2v, \dots, (\phi - \lambda I)^{m-1}v\}$) como uma matriz niltriangular

$$(A - \lambda I)|_{V^\lambda(\phi)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto ϕ possui a forma acima, porém com λ 's na diagonal. Portanto concluímos que

- i) o polinômio característico de $\phi|_{V^\lambda(\phi)}$ é dado por $(t - \lambda)^k$, onde $k = \dim V^\lambda(\phi)$.
- ii) para uma outra raiz $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) do polinômio característico, o operador $\phi - \lambda_i I$ é não-singular em $V^{\lambda_j}(\phi)$. De fato, $\det[(\phi - \lambda_i I)|_{V^{\lambda_j}(\phi)}] = (\lambda_i - \lambda_j)^k \neq 0$.

► **Obs.16:** Uma outra maneira de se ver que $(\phi - \lambda_i I)$ é não-singular em $V^{\lambda_j}(\phi)$ é considerarmos $v \in V^{\lambda_i}(\phi)$, e portanto $(\phi - \lambda_i I)^{m_i}(v) = 0$. Em particular, se $v \in \ker(\phi - \lambda_j I)$ e

$$\begin{aligned} ((\lambda_i - \lambda_j)I)^{m_i}(v) &= ((\phi - \lambda_i I) - (\phi - \lambda_j I))^{m_i}(v) \\ &= (\phi - \lambda_i I)^{m_i}(v) + \sum_{p=1}^{m_i} \binom{m_i}{p} (\phi - \lambda_i I)^{m_i-p} (\phi - \lambda_j I)^p(v) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

e daí $v = 0$. Segue-se que $(\phi - \lambda_j I)$ é invertível sobre $\oplus_{i \neq j} V_i$ ◀

► **Teorema 33:** A dimensão do subespaço de raízes $V^\lambda(\phi)$ é igual à multiplicidade algébrica de λ ◀

Prova: Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de V cujos primeiros k vetores formam uma base de $V^\lambda(\phi)$.

Nessa base, ϕ tem matriz $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, onde $A = \phi|_{V^\lambda(\phi)}$. Portanto

$$P_\phi(t) = (t - \lambda)^k \det(C - tI).$$

Aqui $C \in W = \text{End}(\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle)$, e mostraremos que λ não é raiz de $\det(C - tI)$, isto é, não é um autovalor de C .

Suponha por absurdo que exista um vetor $0 \neq w \in W$ tal que $Cw = \lambda w$, o que significa que

$$\phi(w) = \lambda w + u, \quad u \in V^\lambda(\phi),$$

e portanto como $u = (\phi - \lambda I)w$ é vetor raiz, então $w \in V^\lambda(\phi)$ o que significa que $w \in W \cap V^\lambda(\phi) = \langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle \cap \langle e_1, \dots, e_k \rangle = \{0\}$, um absurdo, pois $w \neq 0$ ■

O Teorema a seguir generaliza o Teorema 28 e sua demonstração também é bastante similar:

► **Teorema 34:** Subespaços de raízes correspondentes a diferentes raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ do polinômio característico de uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ são L.I. ◀

Prova: Indução em k . Para $k = 1$ não há nada a se provar. Suponha que $k > 1$ e seja

$$a_1 e_1 + \cdots + a_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k = 0, \quad e_i \in V^{\lambda_i}(\phi), \quad a_i \in \mathbb{K}. \quad (4.3)$$

Aplicando-se $(\phi - \lambda_k I)^m$ — onde m é o peso de e_k — na equação acima, obtemos

$$a_1(\phi - \lambda_k I)^m e_1 + \cdots + a_{k-1}(\phi - \lambda_k I)^m e_{k-1} + a_k(\phi - \lambda_k I)^m e_k = 0$$

Pela hipótese de indução em k temos que

$$a_1(\phi - \lambda_k I)^m e_1 = \cdots = a_{k-1}(\phi - \lambda_k I)^m e_{k-1} = 0$$

Como a aplicação $(\phi - \lambda_k I)$ é não-singular em cada um dos subespaços $V^{\lambda_1}(\phi), V^{\lambda_2}(\phi), \dots, V^{\lambda_{k-1}}(\phi)$, segue-se que $a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$. Portanto, pela Eq.(4.3) $a_k = 0$ ■

Como a multiplicidade geométrica de uma raiz λ é a dimensão do espaço gerado pelos autovetores de λ , então $\sum_i \dim V^{\lambda_i}(\phi) = \dim V$, e portanto os dois últimos Teoremas implicam imediatamente no

► **Teorema 35:** *Se o polinômio característico $P_\phi(t)$ cinde em fatores lineares, então*

$$V = \bigoplus_{i=1}^s V^{\lambda_i}(\phi)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ são raízes distintas do polinômio $P_\phi(t)$ ◀

▷ **Exemplo 19:** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

A fim de se colocar A na sua forma de Jordan, precisamos encontrar uma matriz S não singular tal que $S^{-1}AS = J$, onde J é a forma canônica de Jordan. Essa matriz S será composta por autovetores e autovetores generalizados. Calculando os autovalores de A temos que $\det(A - tI) = (t - 1)^2(t - 2)$, e portanto A possui um autovalor repetido $\lambda_1 = 1$. Isso não implica necessariamente que A não possui 3 autovetores. Os autovetores de A são somente $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$, e portanto precisamos encontrar autovetores generalizados.

Sabemos que um autovetor $0 \neq v$ é solução da equação $Av = \lambda v$ ou $(A - \lambda I)v = 0$. Um autovetor generalizado v_i é solução da equação

$$Av_i = \lambda_i v_i + v_{i-1} \quad (4.4)$$

O vetor v_i é o autovetor generalizado correspondente ao autovetor v_{i-1} , e a Eq.(4.4) pode ser reescrita como $(A - \lambda_i I)v_i = v_{i-1}$.

No nosso caso específico, $v_1 = (1, 0, 0)$, v_2 é o autovalor generalizado associado a v_1 e $v_3 = (0, 1, 1)$ é o segundo autovetor de A .

Resolvendo a equação (4.4) $(A - \lambda_1 I)v_2 = v_1$, ou seja,

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

encontramos $v_2 = (0, 2, 1)$

Portanto v_1, v_2, v_3 são as colunas da matriz S , e $S^{-1}AS$ nos dá a forma canônica de Jordan. Explicitamente,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

◁

Investigaremos agora em maior profundidade a ação da aplicação ϕ em cada subespaço de raízes.

Já vimos pela relação (4.1) que $V^\lambda(\phi) = \ker(\phi - \lambda I)^m$, para algum $m \in \mathbb{N}$, e portanto a aplicação

$$\mathcal{N} = (\phi - \lambda I)|_{V^\lambda(\phi)}$$

é nilpotente, sendo então nossa discussão reconduzida ao estudo de aplicações nilpotentes.

Considerando um operador nilpotente $\mathcal{N} \in \text{End}(V)$, o peso de um vetor $v \in V$ com respeito a $\mathcal{N}$ é o menor número $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{N}^m v = 0$ — de fato m é o peso do vetor v visto como um vetor raiz da aplicação $\mathcal{N}$ correspondente à raiz $\lambda = 0$.

► **Lema 6:** Se $v \in V$ é um vetor de peso m , os vetores $\{v, \mathcal{N}v, \mathcal{N}^2v, \dots, \mathcal{N}^{m-1}v\}$ são linearmente independentes ◀

Prova: Faça $\phi = \mathcal{N}$ e $\lambda = 0$ na demonstração do Lema 13 ■

► **Definição 12:** O subespaço $\langle v, \mathcal{N}v, \mathcal{N}^2v, \dots, \mathcal{N}^{m-1}v \rangle$ ($m = \text{peso de } v$) é denominado *subespaço cíclico* associado ao operador $\mathcal{N}$, gerado pelo vetor v ◀

Claramente, um subespaço cíclico é invariante sob ação de $\mathcal{N}$, e a restrição de $\mathcal{N}$ ao subespaço $\langle \mathcal{N}^{m-1}v, \mathcal{N}^{m-2}v, \dots, \mathcal{N}v, v \rangle$ tem matriz

$$J(0) = \mathcal{N}|_{\langle \mathcal{N}^{m-1}v, \mathcal{N}^{m-2}v, \dots, \mathcal{N}v, v \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

denominada *bloco de Jordan* (de ordem m).

► **Teorema 36:** O espaço vetorial V se decompõe na soma direta de subespaços cíclicos do operador $\mathcal{N}$. O número de termos na soma direta é igual a $\dim \ker \mathcal{N}$ ◀

Prova: Provaremos este Teorema usando indução em $n = \dim V$. Para $n = 1$, a afirmativa é óbvia. Para $n > 1$, seja $U \subset V$ um subespaço vetorial de dimensão $(n - 1)$ tal que $\text{Im } \mathcal{N} \subset U$.

O subespaço U é invariante sob a ação de $\mathcal{N}$, pois $\mathcal{N}$ é nilpotente, e pela hipótese de indução segue-se que

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

onde $U_1, \dots, U_k$ são subespaços cíclicos. Tome um vetor $e \in V \setminus U$. Como $\text{Im } \mathcal{N} \subset U$, então

$$\mathcal{N}e = u_1 + \cdots + u_k, \quad u_i \in U_i.$$

Se para algum $i = 1, \dots, k$ pudermos escrever

$$u_i = \mathcal{N}v_i \in \mathcal{N}(U_i), \quad v_i \in U_i$$

então

$$\mathcal{N}(e - v_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^n u_j$$

e portanto podemos sempre substituir e por $e - v_i \in V \setminus U$ e fazermos $u_i = 0$. Portanto para todo i em questão, ou $u_i = 0$ ou $u_i \notin \mathcal{N}(U_i)$ (Lembre-se de que $\mathcal{N}(U_i) = \langle \mathcal{N}u_i, \mathcal{N}^2u_i, \dots, \mathcal{N}^{m_i}u_i \rangle$).

No caso em que $u_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$, i.e., $\mathcal{N}e = 0$, então

$$V = \langle e \rangle \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$$

é uma decomposição em subespaços cíclicos.

Se $\mathcal{N}e \neq 0$, então o peso de $\mathcal{N}e$ é o máximo entre os pesos dos vetores u_i . Com efeito, $\mathcal{N}e = u_1 + \cdots + u_k$ e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^m(\mathcal{N}e) &= \mathcal{N}^m(u_1 + \cdots + u_k) \\ &= \mathcal{N}^m(u_1) + \mathcal{N}^m(u_2) + \cdots + \mathcal{N}^m(u_k). \end{aligned}$$

Por definição, cada U_i é da forma $\langle u_i, \mathcal{N}u_i, \mathcal{N}^2u_i, \dots, \mathcal{N}^{m_i}u_i \rangle$, onde m_i é o peso de u_i .

Sendo m o peso de $\mathcal{N}e$, isso significa que $\mathcal{N}^m(u_1) + \mathcal{N}^m(u_2) + \cdots + \mathcal{N}^m(u_k) = 0$, e a única maneira de que essa soma seja nula é que o peso m_i de cada u_i seja menor ou igual a m . Para provar a igualdade, suponha que para todo $j = 1, \dots, k$ temos que $\mathcal{N}^p u_j = 0$, para $p < m$ (estamos supondo que o máximo dentre os pesos dos u_i seja estritamente menor que m). Então $\mathcal{N}^p(\mathcal{N}e) = 0$, um absurdo, pois m é o peso de $\mathcal{N}e$, que é o menor número tal que $\mathcal{N}^m(\mathcal{N}e) = 0$. Portanto

$$\text{peso de } \mathcal{N}e = \max_i \{\text{pesos de } u_i\}$$

Vamos assumir sem perda de generalidade que o peso de $\mathcal{N}e$ seja igual ao peso de $u_1 = m$.

Segue-se que o peso de e é igual a $m + 1$. Mostraremos agora que

$$V = \langle e, \mathcal{N}e, \mathcal{N}^2e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_k.$$

Já que $u_1 \notin \mathcal{N}(U_1)$, temos que $\dim U_1 = \text{peso de } u_1 = m$, pois

$$U_1 = \langle u_1, \mathcal{N}u_1, \mathcal{N}^2u_1, \dots, \mathcal{N}^{m-1}u_1 \rangle,$$

mas

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim U + 1 = \dim U_1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k + 1 \\ &= m + 1 + \dim U_2 + \cdots + \dim U_k \end{aligned}$$

Portanto basta mostrar que $\langle e, \mathcal{N}e, \mathcal{N}^2e, \dots, \mathcal{N}^m e \rangle \cap (U_2 \oplus \dots \oplus U_k) = \{0\}$.

Assuma que $b_0e + b_1\mathcal{N}e + b_2\mathcal{N}^2e + \dots + b_m\mathcal{N}^m e \in U_2 \oplus \dots \oplus U_k$. Como $e \notin U$, então $b_0 = 0$.

Como $\mathcal{N}e = u_1 + \dots + u_k$, então tomamos a projeção dos termos acima sobre U_1 , e portanto

$$b_1u_1 + b_2\mathcal{N}u_1 + \dots + b_m\mathcal{N}^{m-1}u_1 = 0,$$

implicando que $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$, pois U_1 é gerado pelo conjunto $\langle u_1, \mathcal{N}u_1, \mathcal{N}^2u_1, \dots, \mathcal{N}^{m-1}u_1 \rangle$, que por sua vez é L.I..

Uma vez provado que V se decompõe na soma direta de subespaços cíclicos do operador $\mathcal{N}$, resta provar agora que o número de termos na soma direta é igual a $\dim \ker \mathcal{N}$. Seja então a decomposição de V na soma direta de subespaços cíclicos da aplicação $\mathcal{N}$

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

É imediato ver que

$$\ker \mathcal{N} = \ker \mathcal{N}|_{V_1} \oplus \dots \oplus \ker \mathcal{N}|_{V_k}$$

Já que

$$\dim \ker \mathcal{N}|_{V_i} = 1$$

pois $V_i = \langle v_i, \mathcal{N}v_i, \mathcal{N}^2v_i, \dots, \mathcal{N}^{m_i-1}v_i \rangle$, e dos vetores L.I. que geram V_i , somente $\mathcal{N}^{m_i-1}v_i \in \ker \mathcal{N}|_{V_i}$, para todo $i = 1, \dots, k$.

Segue-se que $\dim \ker \mathcal{N} = k$ ■

▷ **Ex.117:** Mostre que $\dim \ker \mathcal{N}|_{V_i} = 1$ para todo $i = 1, \dots, k$ ◁

▷ **Ex.118:** Mostre que $\dim U_i = \dim (\mathcal{N}(U_i)) + 1 = \dim (\mathcal{N}^2(U_i)) + 2 = \dots$ ◁

Com isso podemos afirmar que dada uma aplicação linear $\phi \in \text{End}(V)$, quando restringimos ϕ ao subespaço cíclico da aplicação nilpotente $\mathcal{N} = (\phi - \lambda I)|_{V^\lambda(\phi)}$, a aplicação ϕ tem a matriz da forma

$$J(0) + \lambda I = \mathcal{N}|_{\langle \mathcal{N}^{m-1}v, \mathcal{N}^{m-2}v, \dots, \mathcal{N}^2v, \mathcal{N}v, v \rangle} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Tal matriz é denominada *bloco de Jordan* associado ao autovalor λ .

Provaremos agora que uma matriz associada a uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ pode ter blocos de Jordan de diferentes ordens, todos eles associados a uma mesma raiz λ do polinômio característico. De fato, a matriz associada a um operador nilpotente $(\phi - \lambda I) \in \text{End}(V)$ tem a forma em (4.6) se o índice de $(\phi - \lambda I)$ for igual à dimensão de V .

Mostraremos então a seguir que quando o índice do operador nilpotente $\mathcal{N} = (\phi - \lambda I) \in \text{End}(V^\lambda(\phi))$ for menor que a dimensão de V , existe uma base na qual a matriz de $\mathcal{N} = (\phi - \lambda I)$ é formada por blocos do tipo (4.6) ao longo da diagonal.

Considere uma aplicação nilpotente $\mathcal{N} = (\phi - \lambda I) \in \text{End}(V^\lambda(\phi))$ de índice r . Como $\mathcal{N}^r = 0$, isso implica que $\mathcal{N}^r v = 0(v) = 0 \in V^\lambda(\phi)$. Denotando por U_k o conjunto de todos os vetores de peso menor ou igual a k

$$U_k := \{v \in V \mid \mathcal{N}^p(v) = 0, \forall \mathbb{Z} \ni p \leq k\}$$

segue-se que

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_{r-1} \subset U_r = V^\lambda(\phi).$$

Denotando agora $m_k = \dim U_k$, da sequência acima concluímos que

$$n = m_r \leq m_{r-1} \leq \cdots \leq m_1 \leq m_0 = 0 \quad (4.7)$$

Antes de prosseguirmos, enunciemos a

► **Definição 13:** Dizemos que os vetores $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ são L.I. sobre um subespaço vetorial $U \subset V$ se a relação

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \in U, \quad a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$$

implicar que $a_1, \dots, a_k = 0$. ◀

Se o subespaço U consistir unicamente do vetor nulo, então o conceito de independência linear sobre U é o mesmo que o conceito usual de vetores L.I.. Independência linear dos vetores $v_1, \dots, v_k$ sobre U significa que existe uma combinação linear $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ que pertence a U , onde pelo menos um dos $a_i \neq 0$.

O objetivo então é construir uma base do espaço de raízes $V^\lambda(\phi)$ de maneira apropriada à construção dos blocos de Jordan. Como vimos acima, o subespaço U_{r-1} não coincide com todo o espaço $U_r = V^\lambda(\phi)$. Portanto podemos encontrar vetores $u_1, \dots, u_{p_1} \in U_{r-1}$, L.I. em $U_r = V$, onde $p_1 = m_r - m_{r-1}$. Os vetores $\{\mathcal{N}u_1, \dots, \mathcal{N}u_{p_1}\}$ se encontram em U_{r-1} e são L.I. em U_{r-2} . Com efeito, dada uma combinação linear

$$0 \neq a_1 \mathcal{N}u_1 + \cdots + a_{p_1} \mathcal{N}u_{p_1} = w \in U_{r-2} \quad (4.8)$$

então a aplicação do operador $\mathcal{N}^{r-2}$ implica que

$$a_1 \mathcal{N}^{r-1}u_1 + \cdots + a_{p_1} \mathcal{N}^{r-1}u_{p_1} = \mathcal{N}^{r-2}w = 0, \quad \text{pois } w \text{ tem peso } r-2$$

ou de maneira equivalente,

$$a_1 u_1 + \cdots + a_{p_1} u_{p_1} \in U_{r-1},$$

o que é impossível por construção, já que pela Eq.(4.8) temos que $0 \neq a_1 \mathcal{N}u_1 + \cdots + a_{p_1} \mathcal{N}u_{p_1} = w \in U_{r-2}$, e nesse caso teríamos que $w \in U_{r-2}$ tem peso menor ou igual a $r-2$, e também que $w \in U_{r-1}$ tem peso menor ou igual a $r-1$, um absurdo.

Pela Eq.(4.7), segue-se que a dimensão $m_{r-1} - m_{r-2}$ do espaço U_{r-1} sobre U_{r-2} é maior ou igual à dimensão $m_r - m_{r-1}$ do espaço U_r sobre U_{r-1} . Agora complementaremos a lista de vetores $\{\mathcal{N}u_1, \dots, \mathcal{N}u_{p_1}\}$ com vetores $\{u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}\}$ em U_{r-1} a fim de obter o maior sistema possível de vetores L.I. sobre U_{r-2} , onde $p_2 = m_{r-1} - m_{r-2}$. Aplicando-se o operador $\mathcal{N}$ sobre a lista de vetores que temos em mãos, obtemos os vetores

$$\{\mathcal{N}^2 u_1, \dots, \mathcal{N}^2 u_{p_1}, \mathcal{N} u_{p_1+1}, \dots, \mathcal{N} u_{p_2}\} \in U_{r-2}, \quad (4.9)$$

que por sua vez são L.I. sobre U_{r-3} .

Com isso, podemos ver que a matriz da aplicação $\mathcal{N}$ em $V^\lambda(\phi)$ possui a forma

$$\left(\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) \quad (4.10)$$

O número de blocos de tamanho r é igual a p_1 , e o número de blocos de tamanho $r-1$ é igual a $p_2 - p_1$. Analogamente, o número de blocos 2×2 é igual a $p_{r-1} - p_{r-2}$, e o número de blocos 1×1 é igual a $p_r - p_{r-1}$. Se $p_{r-j+1} = p_{r-j}$, então a matriz não possui blocos $j \times j$.

► **Definição 14:** Uma matriz de Jordan é uma matriz diagonal em blocos

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}$$

onde $J_1, J_2, \dots, J_k$ são blocos de Jordan, associados às possíveis k raízes distintas λ_k do polinômio característico do operador $\phi \in \text{End}(V)$, onde $J_i = (\phi - \lambda_i I)|_{V^{\lambda_i}(\phi)}$ ◀

Cada um dos $J_i = \mathcal{N}|_{V^{\lambda_i}(\phi)} = (\phi - \lambda_i I)|_{V^{\lambda_i}(\phi)}$ possui a forma dada pela Eq.(4.10).

A partir dos Teoremas 34 e 35 obtemos o

► **Teorema 37:** Se o polinômio característico $P_\phi(t)$ cinde em fatores lineares, então existe uma base onde a matriz possui a forma de Jordan ◀

Tal matriz é denominada *forma canônica de Jordan*.

▷ **Corolário 5:** A matriz de qualquer aplicação linear sobre o corpo dos complexos se reduz à forma canônica de Jordan. ◀

4.2 Funções de Aplicações Lineares

Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $\phi \in \text{End}(V)$. Para qualquer polinômio

$$f(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m \in \mathbb{K}[t],$$

podemos definir seu valor em ϕ como sendo

$$f(\phi) = a_0 \phi^m + a_1 \phi^{m-1} + \cdots + a_{m-1} \phi + a_m I.$$

▷ **Ex.120:** Mostre que $(f+g)\phi = f(\phi) + g(\phi)$ e que $(fg)(\phi) = f(\phi)g(\phi)$ ◁

Também definimos $f(A)$ onde A é uma matriz. Se a matriz de uma aplicação ϕ em alguma base é A , então a matriz do operador $f(\phi)$ nessa base é $f(A)$.

Um polinômio f tal que $f(\phi) = 0$ é denominado *polinômio aniquilador* de ϕ . O polinômio de menor grau que aniquila ϕ é denominado *polinômio mínimo* de ϕ , denotado por m_ϕ .

Todo polinômio aniquilador f é divisível por m_ϕ . Com efeito, se o resto da divisão de f por m_ϕ é diferente de zero, então existe um polinômio aniquilador de ϕ de grau menor do que o grau de m_ϕ , contradizendo a definição de polinômio mínimo. Um polinômio mínimo é único a menos de um fator constante, e a fim de o definir de maneira única, exigimos que seu coeficiente líder seja 1.

▷ **Ex.121:** Determine os polinômios mínimos associados à aplicação nula e à identidade ◁

Se o espaço vetorial V se decompõe na soma direta de subespaços invariantes de uma aplicação ϕ , então o polinômio mínimo de ϕ é igual ao mínimo múltiplo comum dos polinômios mínimos da restrição de ϕ a esses subespaços, e uma vez sabendo isso é fácil encontrar o polinômio mínimo de uma aplicação linear a partir de sua forma canônica de Jordan. O primeiro passo é encontrar o polinômio mínimo de um bloco de Jordan.

► **Proposição 9:** O polinômio mínimo de um bloco de Jordan de ordem m com autovalor λ é igual a $(t - \lambda)^m$ ◀

Prova: Seja η a aplicação linear associada a este bloco de Jordan. Então $\mathcal{N} = (\eta - \lambda I)$ é nilpotente de peso m , isto é

$$(\eta - \lambda I)^m = 0, \quad (\eta - \lambda I)^{m-1} \neq 0.$$

Segue-se então que $(t - \lambda)^m$ é o polinômio aniquilador e nenhum dos seus divisores é polinômio aniquilador ■

Considere agora ϕ uma aplicação linear cujo polinômio característico P_ϕ cinde em fatores lineares. Seja $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ todas as raízes (distintas) de P_ϕ . O Lema anterior, juntamente com o parágrafo que o antecede, implicam no

► **Teorema 38:** O polinômio mínimo de uma aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ é dado por

$$m_\phi(t) = \prod_{i=1}^s (t - \lambda_i)^{m_i}$$

onde m_i é a ordem máxima dos blocos de Jordan com autovalor λ_i na forma canônica de Jordan de ϕ ◀

▷ **Corolário 6:** Vemos que a forma canônica de Jordan de ϕ é diagonal se, e somente se o polinômio mínimo de ϕ não possui raízes múltiplas ◁

▷ **Exemplo 20:** Considere $\phi \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$ tal que $\phi^m = I$ para algum $m \in \mathbb{N}$. O polinômio $t^m - 1$ é um polinômio aniquilador de ϕ , e já que ele não possui raízes múltiplas, o polinômio mínimo de ϕ também não possui raízes múltiplas. Então, a forma canônica de Jordan de ϕ é diagonal, com as entradas sendo raízes da unidade de grau m ◁

▷ **Exemplo 21:** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Suas raízes características são dadas por $\lambda = 1$, com multiplicidade algébrica igual a dois. Calculemos então seus autovetores:

$$(A - 1I)v = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que implica que o único autovetor v dessa matriz é dado por $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Para encontrarmos

o outro vetor $w = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ que forma uma base de $\mathbb{R}^2$, sabemos que ele deve ser um vetor raiz de peso 2 (ou seja $(A - 1I)^2 w = 0$ e $(A - 1I)w \neq 0$), e portanto

$$(A - 1I)w = v \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Portanto $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Na base formada por $\{v, w\}$, a matriz terá um formato mais simples, pois sabemos que $Av = v$ e que $(A - 1I)w = v$, ou seja, $Aw = v + w$. Portanto nessa base $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De fato, a matriz formada pelas componentes de v e w na base canônica é dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que corresponde à forma de Jordan da matriz A . ◁

▷ **Ex.122:** Encontre o polinômio mínimo das matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

◁

▷ **Exemplo 22:** Neste exemplo queremos encontrar todas aplicação $\phi \in \text{End}(V)$ tais que $\phi^3 = \phi^2$. Essa condição significa que o polinômio aniquilador de ϕ é dado por $t^3 - t^2 = t^2(t - 1)$ e portanto o polinômio mínimo de ϕ divide $t^2(t - 1)$. Pelo Teorema anterior, isso é válido se, e somente se a forma canônica de Jordan de ϕ possui blocos dos tipos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (0), \quad (1).$$

O número de blocos de cada tipo pode ser arbitrário, em particular zero, e a soma de suas ordens é n , se $\dim V = n$ ◁

▷ **Ex.123:** Calcule os autovalores e subespaços de raízes das seguintes matrizes:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.124:** Determine a forma de Jordan das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.125:** Qual é a forma de Jordan de uma aplicação com polinômio característico $(t - 2)^2(t - 5)^3$ tal que o espaço de autovetores para o autovalor 2 tem dimensão 1, enquanto que o espaço para o autovalor 5 tem dimensão 2? ◁

▷ **Ex.126:** Ache todas as formas de Jordan possíveis para $A \in M(8, \mathbb{K})$ com polinômio mínimo dado por $t^2(t - 1)^3$ ◁

▷ **Ex.127:** Encontre o polinômio mínimo, o polinômio característico, as raízes características, e as multiplicidades geométricas dos autovetores, associados à matriz $A \in M(10, \mathbb{K})$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus 1 \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.128:** Quantas formas de Jordan possui uma aplicação com polinômio característico $(t - 2)^4(t - 1)^2$? ◁

▷ **Ex.129:** Se uma aplicação $\phi \in \text{End}(\mathbb{C}^5)$ possui polinômio característico $(t - 2)^3(t - 1)^2$ e polinômio mínimo $(t - 2)^2(t - 1)$, qual é a forma de Jordan de ϕ ? ◁

▷ **Ex.130:** Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, expresse A^n como uma função de $n \in \mathbb{N}$. ◁

▷ **Ex.131:** Determine a forma de Jordan das matrizes

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{Resp. : } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Resp. : } \text{diag}(1, 2 + 3i, 2 - 3i)$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Resp. : } \text{diag}(-2, 1, 1)$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{Resp. : } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{Resp. : } \text{diag}(0, 2, 2)$$

◁

▷ **Ex.132:** Calcule os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

os autovetores correspondentes, e a dimensão dos autoespaços correspondentes. ◁

► **Lema 7:** *Sejam $\phi \in \text{End}(V)$ e $U \subseteq V$ um subespaço ϕ -invariante. Então ϕ induz uma aplicação $\bar{\phi} \in \text{End}(V/U)$ definida por $\bar{\phi}(v + U) = \phi(v) + U$, para todo $v \in V$. Se $f \in \mathbb{K}[x]$ é tal que $f(\phi) = 0$, então $f(\bar{\phi}) = \bar{0} \in V/U$. Se m e $\bar{m}$ são os polinômios mínimos de ϕ e $\bar{\phi}$ respectivamente, então $\bar{m}$ divide m ◀*

Prova: A aplicação $\bar{\phi}$ é bem-definida. De fato, se $\bar{v} = v_1 + W = v_2 + W$, então $v_1 - v_2 \in W$ e $\phi(v_1 - v_2) \in W$. Daí $\phi(v_1) = \phi(v_2) + W$ e portanto $\phi(v_1) + W = \phi(v_2) + W$.

Se $\bar{v} \in V/U$ então

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^2(\bar{v}) &= \phi^2(v) + W = \phi(\phi(v)) + W \\ &= \bar{\phi}(\phi(v) + W) = \bar{\phi}(\bar{\phi}(v + W)) \\ &= (\bar{\phi})^2(\bar{v}) \end{aligned}$$

e o mesmo vale por indução para $\bar{\phi}^k = (\bar{\phi})^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se $f \in \mathbb{K}[x]$, então $f(\bar{\phi}) = \overline{f(\phi)}$, e se $f(\phi) = 0$, então $f(\bar{\phi}) = \bar{0}$. Como $m(\bar{\phi}) = \overline{m(\phi)} = \bar{0}$, então $\bar{m}$ divide m ■

▷ **Ex.133:** Mostre que $\bar{\phi}$ é linear ◁

► **Teorema 39:** *Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, $\phi \in \text{End}(V)$, $\dim V = n$. Se todas as raízes do polinômio característico de ϕ pertencem a um corpo $\mathbb{K}$, então existe uma base de V na qual a matriz A de ϕ é triangular, ou seja, $[a_{ij}] = 0$, $i \geq j$ ◀*

Prova: Indução sobre n . O caso $n = 1$ é trivial. Seja $\dim V = n > 1$, e seja $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ um autovalor de ϕ com autovetor v_1 . Considerando $W = \langle v_1 \rangle$, $\phi(W) \subset W$ e $\dim W = 1$, com $\dim V/W = n - 1$. Seja $\bar{\phi}$ a aplicação induzida sobre V/W . Já sabemos que cada raiz de m_1 é uma raiz de m , e que cada autovalor de ϕ é raiz de m , portanto as raízes de m_1 pertencem a $\mathbb{K}$. Então existe uma base $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ de V/W tal que

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(\bar{v}_2) &= a_{22}\bar{v}_2 \\ \bar{\phi}(\bar{v}_3) &= a_{23}\bar{v}_2 + a_{33}\bar{v}_3 \\ &\vdots \\ \bar{\phi}(\bar{v}_n) &= a_{2n}\bar{v}_2 + \dots + a_{nn}\bar{v}_n\end{aligned}$$

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ formam uma base de V . Além disso, $\phi(v_i) = w_i + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ii}v_i$, onde $w_i = a_{1i}v_1$ e portanto $\phi(v_i) = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{ii}v_i$ ■

▷ **Corolário 7:** *Seja $A \in M(n, \mathbb{K})$. Se todas as raízes de $P_A(t) = \det(A - tI)$ pertencerem a $\mathbb{K}$, então A é semelhante a uma matriz triangular ◀*

► **Teorema 40:** (Cayley-Hamilton) *Dado $\phi \in \text{End}(V)$, se todas as raízes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $P_\phi(t) = \det(\phi - tI)$ pertencerem a $\mathbb{K}$, então $P_\phi(\phi) = 0$ ◀*

Prova: A matriz $A \in M(n, \mathbb{K})$ associada a ϕ é uma matriz triangular superior, numa certa base $\{v_1, \dots, v_n\}$. Se $U_0 = \{0\}$ e $U_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$, então $U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_n = V$, e $\phi(U_i) \subseteq U_i$. Portanto $P_\phi(t) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$, e portanto $P_A(A) = (-1)^n(A - a_{11}I) \dots (A - a_{nn}I)$ pois $\lambda_i = a_{ii}$, onde $[a_{ij}] = A$. Para cada $i = 1, \dots, n$, $Av_i = u + a_{ii}v_i$, onde $u \in U_{i-1}$ e portanto $(A - a_{ii}I)v_i = u \in U_{i-1}$. O operador $A - a_{ii}I$ mapeia U_i em U_{i-1} e $p_A(A) = (A - a_{11}I)(A - a_{22}I) \dots (A - a_{nn}I)$, logo temos a seqüência

$$V = U_n \xrightarrow{A - a_{nn}I} U_{n-1} \xrightarrow{A - a_{(n-1)(n-1)}I} U_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow U_2 \xrightarrow{A - a_{22}I} U_1 \xrightarrow{A - a_{11}I} U_0 = \{0\}$$

Segue-se que $P_A(A)$ é um mapa de V em $\{0\}$ e portanto $P_A(A) = 0$ ■

Este capítulo se inicia introduzindo um conceito mais geral que engloba os demais conceitos envolvidos nos capítulos anteriores.

Para entendermos do que se trata a álgebra tensorial, devemos ter em mente o que significa álgebra.

► **Definição 15:** Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, com uma operação adicional: dados $u, v \in V$ o produto bilinear em $\mathcal{A} = (V, \cdot)$, $(u, v) \mapsto u \cdot v \in \mathcal{A}$. Então $(V, \cdot)$ é denominado uma álgebra (associativa) sobre $\mathbb{K}$ se

1. $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w), \forall u, v, w \in V$
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
4. $a(u \cdot v) = (au) \cdot v = u \cdot (av)$

Se existir um elemento $1 \in V$ tal que $1 \cdot u = u \cdot 1 = u$ para todo $u \in V$, então V é uma *álgebra unital* (ou álgebra com unidade). A álgebra V é dita comutativa se $u \cdot v = v \cdot u, \forall u, v \in V$ ◀

5.1 Aplicações Multilineares

Sejam $V_1, V_2, \dots, V_p$ e W $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. A aplicação

$$\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W \quad (5.1)$$

é denominado *multilinear* (ou p -linear) se for linear em cada um dos p argumentos, quando os outros argumentos estão fixos, ou seja, dados arbitrariamente $c \in \mathbb{K}, v_1, v'_1 \in V_1, v_2, v'_2 \in V_2, \dots, v_n, v'_n \in V_n$, então

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_p) + \phi(v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_p) &= \phi(v_1, v_2, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_p), \\ c\phi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_p) &= \phi(v_1, v_2, \dots, cv_i, \dots, v_p), \quad \forall i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Quando $p = 1$ a aplicação é linear, e quando $p = 2$ a aplicação ϕ é bilinear.

Tais aplicações formam um espaço vetorial, que é por si próprio um subespaço vetorial do espaço de todas as aplicações $\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow W$, ao definirmos a soma de duas aplicações p -lineares e a multiplicação por escalar de uma aplicação p -linear:

$$\begin{aligned} (\psi + \phi)(v_1, \dots, v_p) &= \psi(v_1, \dots, v_p) + \phi(v_1, \dots, v_p) \\ (a\phi)(v_1, \dots, v_p) &= a\phi(v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

Denotamos tal subespaço é denotado por $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; W)$.

▷ **Ex.134:** Mostre que $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; W)$ é de fato um espaço vetorial ◁

Se os espaços $V_1, \dots, V_p, U$ possuem dimensão finita, então $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U)$ também tem dimensão finita, e mais precisamente

$$\dim \text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U) = \dim V_1 \cdots \dim V_p \cdot \dim U$$

já que a aplicação em (5.1) é determinada pelas imagens dos vetores das bases de $V_1, \dots, V_p$, que por sua vez são determinadas pelas suas coordenadas na base de U .

Quando $U = \mathbb{K}$, obtemos o espaço $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; \mathbb{K})$ das funções multilineares em $V_1 \times \cdots \times V_p$. Nesse caso, as aplicações p -lineares são denominadas *formas p-lineares*. Em particular $\text{Hom}(V, \mathbb{K})$ é o espaço dual V^* de V .

▷ **Ex.135:** A multiplicação de números reais $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = xy$ é bilinear. Mostre que a aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x_1, \dots, x_p) = x_1.x_2.\dots.x_p$ é p -linear ◁

▷ **Ex.136:** Dados U, V $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais, mostre que dada $\phi \in \text{Hom}(U, V)$, e $v \in V$, a aplicação

$$\begin{aligned} A : \text{Hom}(U, V) \times U &\rightarrow V \\ (\phi, v) &\mapsto A(\phi, v) = \phi(v) \end{aligned}$$

é bilinear ◁

► **Proposição 10:** Sejam U, V $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais e $S \subset U$ um conjunto de geradores. Se duas aplicações p -lineares $\phi, \psi : \underbrace{U \times \cdots \times U}_{p\text{-vezes}} \rightarrow V$ são tais que $\phi(v_1, \dots, v_p) = \psi(v_1, \dots, v_p)$ para quaisquer $v_1, \dots, v_p \in S$, então $\phi = \psi$ ◀

Prova: A proposição é óbvia quando $p = 1$. Suponha que ela seja válida para k e considere $\phi, \psi : \underbrace{U \times \cdots \times U}_{(p+1)\text{-vezes}} \rightarrow V$ tais que $\phi(v_1, \dots, v_{p+1}) = \psi(v_1, \dots, v_{p+1})$ quando $v_1, \dots, v_p, v_{p+1} \in S$.

Tome $v \in V$ fixo e defina $\psi', \phi' : \underbrace{U \times \cdots \times U}_{p\text{-vezes}} \rightarrow V$, pondo $\phi'(v_1, \dots, v_p) = \phi(v_1, \dots, v_p, v)$ e $\psi'(v_1, \dots, v_p) = \psi(v_1, \dots, v_p, v)$. Portanto ψ' e ϕ' coincidem quando $v_1, \dots, v_p \in S$ e pela hipótese de indução $\psi' = \phi'$. Portanto $\phi(v_1, \dots, v_p, v) = \psi(v_1, \dots, v_p, v)$ para todos $v_1, \dots, v_p, v \in U$, ou seja, $\psi = \phi$ ■

▷ **Ex.137:** Mostre que, dada uma aplicação p -linear $\phi : U_1 \times \cdots \times U_p \rightarrow V$, sua imagem $\phi(U_1 \times \cdots \times U_p)$ não é um subespaço vetorial de V , quando $p \neq 1$. ◁

▷ **Ex.138:** Mostre que a composição de uma aplicação linear $\phi \in \text{Hom}(U, V)$ com uma aplicação p -linear $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U)$ é p -linear e pertence a $\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; V)$ ◁

▷ **Ex.139:** Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^4$. Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação bilinear definida por $\phi(e_1, e_1) = \mathbf{e}_1, \phi(e_1, e_2) = \mathbf{e}_2, \phi(e_2, e_1) = \mathbf{e}_3, \phi(e_2, e_2) = \mathbf{e}_4$. Mostre que um vetor $v = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + v^3\mathbf{e}_3 + v^4\mathbf{e}_4 \in \mathbb{R}^4$ é da forma $v = \phi(x, y)$, onde $x, y \in \mathbb{R}^2$ se, e somente se $v^1v^4 = v^2v^3$. Conclua que a imagem de ϕ gera, porém não coincide com $\mathbb{R}^4$. Em particular, $\phi(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ não é subespaço vetorial ◁

5.2 Produto Tensorial entre Espaços Vetoriais

O produto tensorial entre dois espaços vetoriais V e W surge naturalmente quando consideramos aplicações bilineares $\phi : V \times W \rightarrow U$. Um desses mapas é *universal*, no sentido que de certa maneira ele descreve todos os outros.

► **Definição 16:** O produto tensorial entre $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais V e W é um espaço T com um mapa bilinear

$$\begin{aligned}\otimes : V \times W &\rightarrow T \\ (v, w) &\mapsto (v \otimes w)\end{aligned}$$

que satisfaz a seguinte condição: se $\{e_i \mid i \in I\}$ e $\{f_j \mid j \in J\}$ são bases de V e W — aqui I e J são conjuntos de índices — respectivamente, então $\{e_i \otimes f_j \mid i \in I, j \in J\}$ é base de T ◀

Tal condição não depende das escolhas de bases de V e W . Denotamos também $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ quando quisermos explicitamente enfatizar sobre qual corpo estamos efetuando o produto tensorial.

O produto tensorial existe para quaisquer espaços vetoriais V e W , pois ao se considerar o espaço vetorial T com base $\{t_{ij}\}$, definimos a aplicação $\otimes : V \times W \rightarrow T$ tal que $e_i \otimes f_j = t_{ij}$.

O produto tensorial é único a menos de isomorfismo, no sentido de que se $(T_1, \otimes_1)$ e $(T_2, \otimes_2)$ são dois produtos tensoriais entre V e W , então existe um (único) isomorfismo

$$\begin{aligned}\psi : T_1 &\rightarrow T_2 \\ v \otimes_1 w &\mapsto v \otimes_2 w\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$. Com efeito, para vetores da base de V e W o isomorfismo em questão pode ser construído como $\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j$. Por linearidade tal isomorfismo é estendido para todos $v \in V$ e $w \in W$.

Em particular, $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$.

▷ **Exemplo 23:** Considere respectivamente os espaços dos polinômios na variável x e y sobre um corpo $\mathbb{K}$, e a aplicação bilinear

$$\begin{aligned}\otimes : \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[y] &\rightarrow \mathbb{K}[x, y] \\ (f \otimes g)(x, y) &\mapsto f(x)g(y)\end{aligned}$$

Para $i, j = 0, 1, 2, \dots$, os produtos $x^i \otimes y^j = x^i y^j$ formam uma base de $\mathbb{K}[x, y]$, e portanto $\mathbb{K}[x, y] = \mathbb{K}[x] \otimes \mathbb{K}[y]$ ◀

▷ **Ex.140:** Sejam $v, u \in \mathbb{R}^2$ os vetores $v = 2e_1 - e_2, u = e_1 + 3e_2$. Calcule os produtos tensoriais $v \otimes u$ e $u \otimes v$ na base canônica, e verifique que o produto tensorial *não* é comutativo ◀

Embora o produto tensorial entre dois espaços vetorial não seja comutativo, é possível estabelecer um isomorfismo

$$\begin{aligned}c_{V,W} : V \otimes W &\rightarrow W \otimes V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v\end{aligned} \tag{5.2}$$

ao requerermos que a base $e_i \otimes f_j$ de $V \otimes W$ seja levada na base $f_j \otimes e_i$ de $W \otimes V$.

▷ **Ex.141:**

- a) Mostre que $c_{V,W} \circ c_{W,V} = \text{id}_V$ e que $c_{W,V} \circ c_{V,W} = \text{id}_W$
- b) Dado o espaço vetorial $U \otimes V \otimes W$, mostre que $(c_{V,W} \otimes I) \circ (I \otimes c_{U,W}) \circ (c_{U,V} \otimes I) = (I \otimes c_{U,V}) \circ (c_{U,W} \otimes I) \circ (I \otimes c_{V,W})$. Essa relação é denominada equação de Yang-Baxter e origina o grupo das tranças.

◁

► **Obs.17:** Equipado com essas estruturas o conjunto $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_p$ é denominada soma direta *exterior* dos espaços vetoriais $V_1, V_2, \dots, V_p$ e é denotada por $\bigoplus_{i=1}^p V_i$. Considere o sub-

espaço livre $\mathcal{M}$ of $\bigoplus_{i=1}^p V_i$ que consiste das somas finitas formais $\sum_{(v_1, \dots, v_p) \in \bigoplus_{i=1}^p V_i} a_{v_1 \dots v_p} (v_1, \dots, v_p)$. A denominação *livre* na definição acima significa que $\sum_{(v_1, \dots, v_p) \in \bigoplus_{i=1}^p V_i} a_{v_1 \dots v_p} (v_1, \dots, v_p) = 0$, implicando que $a_{v_1 \dots v_p} = 0$.

O subespaço $\mathcal{M}_0 \in V$ é um subespaço de $\mathcal{M}$ gerado pelos vetores de um dos seguintes tipos:

- (i) $(v_1, v_2, \dots, v'_i + v''_i, \dots, v_p) - (v_1, v_2, \dots, v'_i, \dots, v_p) - (v_1, v_2, \dots, v''_i, \dots, v_p)$,
- (ii) $(v_1, v_2, \dots, cv_i, \dots, v_p) - c(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_p), \quad \forall i = 1, 2, \dots, p, c \in \mathbb{K}$.

Podemos definir no espaço $\mathcal{M}$ a seguinte relação de equivalência. Dados $u, v \in \mathcal{M}$ dizemos que $u \equiv v \pmod{\mathcal{M}_0}$ se $u - v \in \mathcal{M}_0$. Considere agora o espaço quociente $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$, cujos elementos são as classes de equivalência de $\mathcal{M}$ definidas pela Eq.(3.6). Os elementos de $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ são denotados por $[\bar{u}]$ ou $\bar{u} + \mathcal{M}_0$. O espaço $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ possui uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, ao definirmos

$$\begin{aligned} [\bar{u} + \bar{v}] &= [\bar{u}] + [\bar{v}], \\ c[\bar{u}] &= [c\bar{u}], \quad c \in \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Eqs.(5.3) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} (\bar{u} + \mathcal{M}_0) + (\bar{v} + \mathcal{M}_0) &= (\bar{u} + \bar{v}) + \mathcal{M}_0, \\ c(\bar{u} + \mathcal{M}_0) &= (c\bar{u} + \mathcal{M}_0), \quad c \in \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

A projeção canônica é definida como sendo a aplicação $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{M}_0$, onde $\pi \in \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{M}/\mathcal{M}_0)$. Já que $\pi(\bar{u}) = \pi(\bar{v}) \Rightarrow \bar{u} \equiv \bar{v} \pmod{\mathcal{M}_0}$, e $\bar{u} \equiv \bar{v} \pmod{\mathcal{M}_0} \Rightarrow \pi(\bar{u}) = \pi(\bar{v})$, segue-se que $\pi(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{0}$, de onde concluímos que $\pi(\mathcal{M}_0) = \bar{0}$, i.e., $\ker \pi = \mathcal{M}_0$. Formalmente o espaço $\mathcal{M}/\mathcal{M}_0$ é denominado produto tensorial entre os espaços $V_1, V_2, \dots, V_p$ e denotado por $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p$. Os elementos de $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p$ são denominados tensores. Seja $\bar{u} = (v_1, v_2, \dots, v_p) \in \mathcal{M}$ e escrevemos

$$\pi(v_1, v_2, \dots, v_p) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p, \quad (5.5)$$

e denominamos $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p$ um tensor *fatorizável*. ◀

▷ **Exemplo 24:** Dados $\alpha \in V^*$ e $w \in W$, defina a aplicação linear

$$\begin{aligned} \otimes : V^* \times W &\rightarrow \text{Hom}(V, W) \\ (\alpha, w) &\mapsto \alpha \otimes w : V \rightarrow W \\ v &\mapsto (\alpha \otimes w)(v) := \alpha(v)w \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tomando $\{e^i\}$ e $\{f_j\}$ bases canônicas de V^* e W respectivamente, o elemento $e^i \otimes f_j$ é levado à matriz E_{ij} , onde a entrada (i, j) é 1, e as demais entradas valem zero. ◁

▷ **Exemplo 25:** No exemplo anterior, no caso particular quando $V = W$, temos o isomorfismo $V^* \otimes V \simeq \text{End}(V)$, e portanto temos a equivalência entre elementos $\sum_{i,j=1}^n a_i^j e^i \otimes e_j \in V^* \otimes V$ e a matriz $[a_{ij}] \in \text{End}(V)$. Sabemos que o espaço $\text{End}(V)$ é munido de um funcional linear canônico: o traço $\text{Tr} : \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ — definido por $\text{Tr}[a_{ij}] = \sum_{i=1}^n [a_{ii}]$. Portanto o traço induz um funcional linear

$$\begin{aligned} V^* \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ \sum_{i,j=1}^n a_i^j e^i \otimes e_j &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i^i \end{aligned} \quad (5.7)$$

denominado *contração*. ◁

Dados $\alpha \in V^*$, $\beta \in W^*$, definimos agora o produto tensorial $\alpha \otimes \beta$ em $V \times W$ por

$$(\alpha \otimes \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w), \quad v \in V, w \in W \quad (5.8)$$

obtendo assim o mapa bilinear

$$\otimes : V^* \times W^* \rightarrow \text{Hom}(V, W; \mathbb{K}).$$

Aqui $(e^i, f^j)(u, v) = u_i v_j$, onde $(u_1, \dots, u_n)$ e $(v_1, \dots, v_n)$ são componentes dos vetores u e v respectivamente. Já vimos que toda função bilinear $B : V \otimes W \rightarrow \mathbb{K}$ se decompõe unicamente como $B(u, v) = \sum_{i,j} c_{ij} u_i v_j$, as funções $e^i \otimes f^j$ formam uma base $\text{Hom}(V, W; \mathbb{K})$. Assim

$$\text{Hom}(V, W; \mathbb{K}) \simeq V^* \otimes W^* \quad (5.9)$$

Em particular, quando nos restringimos ao produto tensorial tomado sobre cópias do mesmo espaço vetorial V , já vimos que um covetor age sobre um vetor resultando numa quantidade escalar. Desse modo, $\alpha, \beta \in V^*$ e $u, v \in V$, sabemos que $\alpha(u)$ e $\beta(v)$ e podemos considerar o produto dessas duas quantidades, ou seja, $\alpha(u)\beta(v)$. Como consequência dessa definição o produto tensorial não é comutativo. Como caso particular da Def. 15, um produto tensorial entre vetores — com valores em $\mathbb{K}$ — de um mesmo espaço vetorial age sobre o produto cartesiano $V^* \times V^*$, resultando em um escalar:

$$(u \otimes v)(\alpha, \beta) = \alpha(u)\beta(v)$$

Não é difícil vermos que o espaço definido pelo produto tensorial de covetores é também um espaço vetorial, que denotaremos por $T^2(V) = V^* \otimes V^*$, e denotaremos também por $T_2(V) = V \otimes V$.

▷ **Ex.142:** Mostre que $T^2(V)$ e $T_2(V)$ são espaços vetoriais, e mostre também que $T^2(V) \simeq T_2(V^*)$ e que $T_2(V) \simeq T^2(V^*)$. ◁

Se $\dim V = n$ temos $\dim T_2(V) = \dim T^2(V) = n^2$.

Mais especificamente, considere $\{e_i\}$ uma base para V e $\{e^i\}$ a sua base dual. Sabemos que $\alpha(v) = \sum_i \alpha_i v^i$ e que $\beta(u) = \sum_i \beta_i u^i$, onde $\alpha_i = \alpha(e_i)$, $\beta_i = \beta(e_i)$, $v^i = e^i(v)$ e $u^i = e^i(u)$. Desse modo

$$(\alpha \otimes \beta)(v, u) = \sum_{i,j} \alpha_i v^i \beta_j u^j.$$

Mas $(e^i \otimes e^j)(v, u) = v^i u^j$, e portanto podemos escrever

$$\alpha \otimes \beta = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j e^i \otimes e^j$$

Os funcionais bilineares $\{e^i \otimes e^j\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) formam uma base para o espaço $T^2(V)$. Se B é um funcional bilinear arbitrário podemos escrever $B = b_{ij} e^i \otimes e^j$, onde os escalares b_{ij} — componentes de B nesta base — são dados por $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. Segue-se que $B(v, u) = \sum_{i,j} b_{ij} v^i u^j$.

▷ **Ex.143:** Mostre que $\{e_i \otimes e_j\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) formam uma base para o espaço $T_2(V)$, ou seja, que $A \in T_2(V)$ pode ser escrito na forma $A = \sum_{i,j} a^{ij} e_i \otimes e_j$, onde $a^{ij} = A(e^i, e^j)$ são as componentes de A nessa base. Mostre ainda que os coeficientes a^{ij} são únicos. Da mesma maneira, mostre que $\{e^i \otimes e^j\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) formam uma base para o espaço $T^2(V)$ ◁

Os funcionais bilineares em $T^2(V)$ e $T_2(V)$ podem ser decompostos na soma de funcionais bilineares simétricos e alternados. Vamos tomar como exemplo $B \in T^2(V)$, e definimos um funcional bilinear simétrico B_{sim} como

$$B_{\text{sim}}(v, u) = \frac{1}{2}(B(v, u) + B(u, v))$$

e um funcional bilinear alternado B_{alt} como

$$B_{\text{alt}}(v, u) = \frac{1}{2}(B(v, u) - B(u, v)).$$

▷ **Ex.144:** Mostre que um funcional bilinear arbitrário $B : V^* \otimes V^* \rightarrow \mathbb{K}$ pode ser escrito como $B = B_{\text{sim}} + B_{\text{alt}}$ ◁

O espaço dos funcionais bilineares simétricos $T_{\text{sim}}^2(V)$ e dos funcionais bilineares alternados $T_{\text{alt}}^2(V)$ possuem respectivamente as bases $e^i \otimes e^j + e^j \otimes e^i$ e $e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i$.

▷ **Ex.145:** Prove que as componentes de um elemento $A = A^{ij} e_i \otimes e_j \in T_{\text{alt}}^2(V)$ satisfazem $A^{ij} = -A^{ji}$. ◁

▷ **Ex.146:** Dados $\alpha, \beta : V \rightarrow \mathbb{K}$, mostre que:

1. $\alpha \otimes \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$.
2. $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha \Leftrightarrow \alpha$ e β são múltiplos um do outro.

◁

▷ **Ex.147:** O operador de permutação $P : T^2(V) \rightarrow T^2(V)$ é definido por $P(\alpha \otimes \beta) = \beta \otimes \alpha$, e o operador identidade é dado por $\text{id}(\alpha \otimes \beta) = \alpha \otimes \beta$. Defina os operadores $\text{ALT} : T^2(V) \rightarrow T_{\text{alt}}^2(V)$ e $\text{SIM} : T^2(V) \rightarrow T_{\text{sim}}^2(V)$ tais que $\text{ALT} = \frac{1}{2}(\text{id} - P)$ e $\text{SIM} = \frac{1}{2}(\text{id} + P)$. Prove que $\text{ALT} \circ \text{ALT} = \text{ALT}$, $\text{SIM} \circ \text{SIM} = \text{SIM}$, $\text{ALT} \circ \text{SIM} = 0 = \text{SIM} \circ \text{ALT}$, e que $\text{ALT} + \text{SIM} = \text{id}$. Mostre que $\ker \text{SIM} = T_{\text{alt}}^2(V)$ e $\ker \text{ALT} = T_{\text{sim}}^2(V) \triangleleft$

▷ **Ex.148:** Prove que $T^2(V) = T_{\text{alt}}^2(V) \oplus T_{\text{sim}}^2(V) \triangleleft$

▷ **Ex.149:** Dados $\alpha = e^3 - 4e^1, \beta = 3e^2 - e^3$, calcule $(\alpha \otimes \beta)(u, v)$, onde $u = e_1 + e_2 + 2e_3$ e $v = -2e_1 + e_3$. Calcule também $\alpha \otimes \beta, \alpha \otimes \alpha, \beta \otimes \alpha, \beta \otimes \beta, \alpha \otimes u, v \otimes \beta, u \otimes v, u \otimes u \otimes \alpha$. $\triangleleft$

▷ **Ex.150:** Defina o produto exterior entre três vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ como sendo

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 := \frac{1}{6}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2)$$

Mostre que $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2$ e mais geralmente que $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \in T_{3\text{alt}}(V) \triangleleft$

► **Proposição 11:** Dada uma aplicação linear $\phi : V \times W \rightarrow U$, existe uma única aplicação linear $\psi : V \otimes W \rightarrow U$ tal que

$$\phi(v, w) = \psi(v \otimes w), \quad v \in V, w \in W. \quad (5.10)$$

◀

Prova: Na base de $V \otimes W$, tal mapa linear é dado por

$$\phi(e_i, f_j) = \psi(e_i \otimes f_j) \blacksquare$$

Mais especificamente, provamos o caráter universal do produto tensorial, no sentido de que existe uma função $f : V \times W \rightarrow V \otimes W$ tal que $\psi \circ f = \phi$, como mostra o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\phi} & U \\ & \searrow \scriptstyle f & \uparrow \scriptstyle \psi \\ & & V \otimes W \end{array}$$

Portanto existe um isomorfismo entre $\text{Hom}(V \otimes W; U)$ e $\text{Hom}(V, W; U)$ que leva $\psi : V \otimes W \rightarrow U$ a $\phi : V \times W \rightarrow U$, e em particular quando $U = \mathbb{K}$ temos que

$$(V \otimes W)^* \simeq \text{Hom}(V, W; \mathbb{K})$$

já que $(V \otimes W)^*$ leva o espaço tensorial $V \otimes W$ ao corpo $\mathbb{K}$.

Pelo isomorfismo obtido pela Eq.(5.9), acabamos de mostrar o seguinte isomorfismo:

$$\boxed{(V \otimes W)^* \simeq V^* \otimes W^*} \quad (5.11)$$

O isomorfismo acima é visto como uma extensão da correlação $\tau : V \rightarrow V^*$, que “dualiza” também o produto tensorial:

$$\begin{aligned} \tau : V \otimes W &\rightarrow (V \otimes W)^* \\ v \otimes w &\mapsto \tau(v \otimes w) = \tau(v) \otimes \tau(w) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Funcionais Bilineares Mistos

Assim como definimos produto tensorial entre vetores e entre covetores, podemos também definir o produto tensorial entre um vetor e um covetor. O funcional bilinear assim obtido é denominado funcional bilinear misto. Definimos o produto tensorial $\alpha \otimes v$ através de

$$(\alpha \otimes v)(u, \beta) = \alpha(u)\beta(v).$$

Denotaremos este espaço vetorial por $T_1^1(V) = V^* \otimes V$. Obviamente $\dim T_1^1(V) = n^2$. Uma base para $T_1^1(V)$ é dada pelos produtos tensoriais do tipo $e^i \otimes e_j$. Dessa maneira $C \in T_1^1(V)$ pode ser escrito como $C = \sum_{i,j} c_i^j e^i \otimes e_j$, onde $c_i^j = C(e_i, e_j)$

▷ **Exemplo 26:** Este exemplo é o Ex. 1.5 de [7]. Existe um isomorfismo entre os espaços $T_1^1(V)$ e $T_1^{-1}(V)$ definido por

$$\begin{aligned} c_{V,V^*} : T_1^1(V) &\rightarrow T_1^{-1}(V) \\ \alpha \otimes v &\mapsto c_{V,V^*}(\alpha \otimes v) = v \otimes \alpha \end{aligned}$$

Em termos de uma base de $T_1^1(V)$ podemos escrever $c_{V,V^*}(e^i \otimes e_j) = e_j \otimes e^i$, e tal definição não depende da base escolhida. Apesar do isomorfismo acima, devemos tomar cuidado com a notação, distinguindo os espaços $T_1^1(V)$ e $T_1^{-1}(V)$. Vamos supor que dada uma forma bilinear simétrica g definida em termos de uma base $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ por $g_{11} = 1, g_{12} = 1, g_{21} = 1, g_{22} = -1$, onde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Podemos então levantar e abaixar índices (implicitamente usando a correlação $\tau : V \rightarrow V^*$:

$$e_1 = e^1 + e^2, \quad e_2 = e^1 - e^2,$$

e

$$e^1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), \quad e^2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2).$$

Vamos agora considerar $B \in T_1^1(V)$ dado por

$$B = e^1 \otimes e_2.$$

Temos nesse caso $B_1^1 = 0, B_1^2 = 1, B_2^1 = 0, B_2^2 = 0$. Levantando e abaixando índices com a ajuda das fórmulas acima podemos escrever

$$B = \frac{1}{2}e_1 \otimes e^1 - \frac{1}{2}e_1 \otimes e^2 + \frac{1}{2}e_1 \otimes e^1 - \frac{1}{2}e_1 \otimes e^2$$

ou seja, $B_1^1 = \frac{1}{2}, B_1^2 = -\frac{1}{2}, B_2^1 = \frac{1}{2}, B_2^2 = -\frac{1}{2}$. e portanto $B_i^j \neq B_j^i$ e portanto é preciso distinguir os $T_1^1(V)$ e $T_1^{-1}(V)$. ◁

▷ **Ex.151:** Encontre o valor do tensor $\phi \otimes \psi - \psi \otimes \phi \in T^5(V)$ aplicado em $(v_1, v_2, \dots, v_5)$ onde $\phi = e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2 \in T^2(V)$ e $\psi = e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)$, enquanto que $v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_2 + e_3, v_4 = v_5 = e_2$ ◁

▷ **Ex.152:** Encontre as componentes $\tilde{T}_{123}^{12}$ de um tensor em $T_2^3(V)$ se todas as componentes desse tensor na base $\{e_i\}$ valem 2, e as bases $\{\tilde{e}_i\}$ estão relacionadas por

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

◁

▷ **Ex.153:** Dado V um espaço vetorial 4-dimensional, considere $A = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 + e^3 \otimes e_4 \in T_1^1$. Encontre todos os vetores $v \in V$ tais que $A(v, \alpha) = 0, \forall \alpha \in V^*$ ◁

▷ **Ex.154:** Considere um espaço vetorial 3-dimensional sobre o corpo $\mathbb{Z}_2$, e um tensor $T = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes e_3 \in T_1^1(V)$. Encontre os pares $(v, \alpha) \in V \times V^*$ tal que $T(v, \alpha) = 0$ ◁

▷ **Ex.155:** Considere o isomorfismo $\psi : V^* \otimes V \rightarrow \text{End}(V)$ em (5.6). Dado $A = e^1 \otimes e_3$, calcule $\psi(A)v$, onde $v = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$. Calcule também para o caso onde $A = (e^1 + e^3) \otimes (e^3 + e^4)$ e $v = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3 + 3e_4$ ◁

▷ **Ex.156:** Dada a métrica $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ explicitamente por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

abaixe e levante os índices dos tensores:

a) $e^1 \otimes e_3 + e^2 \otimes e_4$

b) $(e^1 + e^2) \otimes (e_3 + e_4) - (e^1 + e^3) \otimes e_3$ ◁

5.3 A álgebra tensorial de um espaço vetorial

Da mesma maneira que foi estabelecido um isomorfismo de permutação entre espaços vetoriais, através da Eq.(5.2), dados três espaços vetoriais U, V, W sobre $\mathbb{K}$, existe um isomorfismo

$$\begin{aligned} (U \otimes V) \otimes W &\rightarrow U \otimes (V \otimes W) \\ (u \otimes v) \otimes w &\mapsto u \otimes (v \otimes w) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ao identificarmos os espaços tensoriais $(U \otimes V) \otimes W$ e $U \otimes (V \otimes W)$ por tal isomorfismo, podemos escrever produtos tensoriais entre qualquer número finito de espaços vetoriais $V_1, V_2, \dots, V_p$ sem o uso de parênteses. Indução em p mostra que o produto tensorial entre vetores das bases de $V_1, \dots, V_p$ forma uma base para o espaço $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$.

Podemos agora generalizar os resultados obtidos em (5.9, 5.10, 5.11) para o caso do produto tensorial (finito) entre espaços vetoriais, obtendo um isomorfismo

$$\text{Hom}(V_1 \otimes \dots \otimes V_p; U) \simeq \text{Hom}(V_1, \dots, V_p; U) \quad (5.15)$$

que leva uma aplicação linear $\psi : V_1 \otimes \dots \otimes V_p \rightarrow U$ à aplicação p -linear $\phi : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow U$, definida como

$$\phi(v_1, \dots, v_p) = \psi(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$$

e em particular quando $U = \mathbb{K}$ obtemos um isomorfismo

$$(V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* \simeq \text{Hom}(V_1, \dots, V_p; \mathbb{K}) \quad (5.16)$$

Podemos agora generalizar a expressão (5.8) para um número arbitrário de espaços vetoriais de dimensão finita $V_1, \dots, V_p$. Seja

$$(\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_p)(v_1, \dots, v_p) = \alpha_1(v_1) \dots \alpha_p(v_p) \quad (5.17)$$

onde $\alpha_1 \in V_1^*, \dots, \alpha_p \in V_p^*, v_1 \in V_1, \dots, v_p \in V_p$. Segue-se que

$$\text{Hom}(V_1, \dots, V_p; \mathbb{K}) = V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^*. \quad (5.18)$$

Juntamente com o isomorfismo já estabelecido em (5.16), o seguinte isomorfismo decorre imediatamente:

$$\boxed{V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* \simeq (V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^*}$$

Essa expressão é a generalização da relação (5.12), sendo a correlação um automorfismo em relação ao produto tensorial:

$$\begin{aligned} \tau : V_1 \otimes \dots \otimes V_p &\rightarrow (V_1 \otimes \dots \otimes V_p)^* \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_p &\mapsto \tau(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = \tau(v_1) \otimes \dots \otimes \tau(v_p) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Produtos tensoriais entre aplicações lineares

Para quaisquer operadores $A \in \text{End}(V)$ e $B \in \text{End}(W)$, podemos construir a aplicação linear $A \otimes B \in \text{End}(V \otimes W)$ através da definição

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = (A(v)) \otimes (B(w)) \quad (5.20)$$

A aplicação $A \otimes B$ é denominada produto tensorial entre as aplicações lineares A e B .

▷ **Exemplo 27:** Considere $A = [a_{ij}]$ a matriz de A na base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V e $B = [b_{kl}]$ a matriz do operador B na base $\{f_1, \dots, f_m\}$ de W . Então a matriz da aplicação $A \otimes B$ na base $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_m, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2, \dots, e_2 \otimes f_m, \dots, e_n \otimes f_m\}$ de $V \otimes W$ é dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

◁

▷ **Ex.157:** Mostre que $\text{Tr}(A \otimes B) = \text{Tr } A \cdot \text{Tr } B$. Calcule $\text{Tr}(A \otimes A \otimes \dots \otimes A)$ ◁

▷ **Ex.158:** Dada $I = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e as matrizes de Pauli $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ em $M(2, \mathbb{C})$, calcule $\sigma_i \otimes \sigma_j$ ($i, j = 0, 1, 2, 3$) ◁

▷ **Ex.159:** Se $A \in \text{End}(V)$ é diagonalizável, mostre que $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$ é diagonalizável. Sendo $\{\lambda_i\}$ um conjunto de autovalores de A , quais são os autovalores de $A \otimes A \otimes \dots \otimes A$? ◁

▷ **Ex.160:** Encontre a forma canônica de Jordan da aplicação $A \otimes B$, se A e B são respecti-

vamente dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◁

Dados os covetores $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in V^*$ e os vetores $v_1, \dots, v_k \in V$, já definimos na Eq.(5.17) que

$$\begin{aligned} \alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k : \overbrace{V \times V \times \dots \times V}^{k \text{ vezes}} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_k) &\mapsto (\alpha^1 \otimes \dots \otimes \alpha^k)(v_1, \dots, v_k) = \alpha^1(v_1) \dots \alpha^k(v_k) \end{aligned} \quad (5.21)$$

O espaço vetorial $V^{\otimes p}$, formado pelo produto tensorial entre p cópias de V é denotado por $T_p(V) := V \otimes V \otimes \dots \otimes V$, enquanto que o espaço vetorial $(V^*)^{\otimes q}$ definido pelo produto tensorial de q covetores é também um espaço vetorial, denotado por $T^q(V) := V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$. Também definimos

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k : \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^{k \text{ vezes}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_k)(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k) &\mapsto \alpha^1(v_1) \alpha^2(v_2) \dots \alpha^k(v_k). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Podemos considerar um caso mais geral, o de um produto tensorial de um número arbitrário de covetores e vetores, que será elemento do espaço dos tensores de tipo (p, q) em V , denotado por $T_p^q(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$. Um elemento arbitrário $T \in T_p^q(V)$ pode ser escrito na forma

$$T = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_p, \mu_1, \dots, \mu_q} T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} e^{\mu_1} \otimes e^{\mu_2} \otimes \dots \otimes e^{\mu_p} \otimes e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \dots \otimes e_{\nu_q}, \quad (5.23)$$

onde $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_q}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p} = T(e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_q}, e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, \dots, e_{\nu_p})$.

Dada uma permutação $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, definimos o operador ALT neste contexto denominado alternador, da seguinte maneira:

$$\text{ALT}(X_1 \otimes X_2 \otimes \dots \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(p-1)} \otimes X_{\sigma(p)}, \quad (5.24)$$

onde S_p é o grupo simétrico formado pelo conjunto de todas as permutações e $\varepsilon(\sigma)$ vale $+1$ [-1] se a permutação σ for par [ímpar]. O alternador definido dessa maneira é também um operador de projecção ($\text{ALT}^2 = \text{ALT}$). Um k -covetor é um elemento Ψ_k tal que $\Psi_k = \text{ALT}(\Psi_k)$.

▷ **Exemplo 28:** Assumimos que o espaço $T_0^0(V)$ seja igual a $\mathbb{K}$. Além disso, $T_0^1(V) = V^*$, $T_1^0(V) = V$, e mais geralmente

$$T_0^q(V) = \text{Hom}(\underbrace{V, \dots, V}_{q \text{ vezes}}; \mathbb{K})$$

$$T_1^q(V) = \text{Hom}(\underbrace{V, \dots, V}_{q \text{ vezes}}; V)$$

Em particular, tensores do tipo (0,2) são funções bilineares e tensores do tipo (1,1) são aplicações lineares ◁

► **Obs.18:** Os tensores do tipo T_0^q são chamados *covariantes* e os do tipo T_q^0 são chamados *contravariantes* ◀

► **Obs.19:** Convencionamos denotar $T_{-1}^1(V) = T_1^1(V)$ ◀

▷ **Ex.161:** Qual é a dimensão do espaço tensorial $T_p^q(V)$? ◁

▷ **Ex.162:** Mostre que $T_2^2(V) \simeq \text{End}(V \otimes V)$ ◁

▷ **Ex.163:** Mais geralmente, mostre que $T_p(V) \otimes T^p(V) \simeq \text{End}(\underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ vezes}})$ ◁

A multiplicação de tensores determina uma operação bilinear

$$\otimes : T_p^q(V) \times T_r^s(V) \rightarrow T_{p+r}^{q+s}(V)$$

tal que

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_q) \otimes (v_{p+1} \otimes \dots \otimes v_{p+r} \otimes \alpha_{q+1} \otimes \dots \otimes \alpha_{q+s}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_{p+r} \otimes \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{q+s}$$

▷ **Ex.164:** Defina um isomorfismo entre $T_1^1(V) \times T_1^1(V) \rightarrow T_2^2(V)$ ◁

▷ **Ex.165:** Mostre que $T_p(V) \simeq T^p(V^*)$ e que $T^p(V) \simeq T_p(V^*)$ ◁

▷ **Ex.166:** Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_V : V \otimes V^* &\rightarrow \text{End}(V) \\ v \otimes \alpha &\mapsto \phi_V(v \otimes \alpha) : V \rightarrow V \\ u &\mapsto \phi_V(v \otimes \alpha) := v\alpha(u), \quad \forall u, v \in V. \end{aligned} \quad (5.25)$$

1. Mostre que qualquer transformação linear $T \in \text{End}(V)$ pode ser escrita na forma $T = \phi_V(\sum_{i,j} T_j^i e_i \otimes e^j)$, dada uma base arbitrária $\{e_i\}$ de V e sua base dual $\{e^i\} \subset V^*$. Os escalares T_j^i são dados por $T(e^i) = T_j^i e^j$.
2. Mostre que $\ker \phi_V = \{0\}$, de modo que junto com o resultado do item (a) podemos concluir que ϕ_V é um isomorfismo entre $V \otimes V^*$ e $\text{End}(V)$
3. Mostre que $\phi_V(e_i \otimes e^j) = \text{id}_V$

4. Considere as aplicações

$$\begin{aligned}\psi_V : V^* \otimes V &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \otimes v &\mapsto \psi_V(\alpha \otimes v) := \alpha(v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{V,V^*} : V \otimes V^* &\rightarrow V^* \otimes V \\ v \otimes \alpha &\mapsto c_{V,V^*}(v \otimes \alpha) := \alpha \otimes v\end{aligned}$$

para quaisquer $v \in V$ e $\alpha \in V^*$. Mostre que a função traço pode ser definida através da seguinte composição de aplicações: $\text{Tr} = \psi_V \circ c_{V,V^*} \circ \phi_V^{-1}$.

◁

▷ **Exemplo 29:** Seja $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) a base canônica de $V = \mathbb{R}^3$ e $\{e^i\}$ a sua base dual. Defina uma correlação $\tau : V \rightarrow V^*$ como $\tau(e_1) = 4e^1 + e^2$, $\tau(e_2) = e^1 + 3e^2$, $\tau(e_3) = e^3$. Portanto dados $u = \sum_{i=1}^3 u^i e_i \in V$ e $v = \sum_{j=1}^3 v^j e_j \in V$, já vimos que $g(u, v) = \tau(u)(v)$, e temos que

$$\begin{aligned}g(u, v) &= \tau(u^1 e_1 + u^2 e_2 + u^3 e_3)(v) = u^1(4e^1 + e^2)(v) + u^2(e^1 + 3e^2)(v) + u^3 e^3(v) \\ &= 4u^1 v^1 + u^1 v^2 + u^2 e^1 + 3u^2 v^2 + u^3 v^3 \\ &= 4(e^1 \otimes e^1)(u, v) + (e^1 \otimes e^2)(u, v) + (e^2 \otimes e^1)(u, v) + 3(e^2 \otimes e^2)(u, v) + (e^3 \otimes e^3)(u, v)\end{aligned}$$

e portanto

$$g = 4e^1 \otimes e^1 + e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 + 3e^2 \otimes e^2 + e^3 \otimes e^3 \in V^* \otimes V^* \quad (5.26)$$

◁

Mais geralmente, uma forma bilinear $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ com valores em $\mathbb{K}$ pode ser escrita como

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} e^i \otimes e^j \in T^2(V)$$

▷ **Ex.167:** Mostre que se $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ for simétrica, então $g_{ij} = g_{ji}$, enquanto que se $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ for alternada, então $g_{ij} = -g_{ji}$ ◁

Outra operação importante sobre os tensores é denominada contração, uma aplicação linear

$$T_p^q(V) \rightarrow T_{p-1}^{q-1}(V), \quad p, q > 0$$

definida ao se considerar a aplicação

$$\begin{aligned}\text{End}(V \otimes V) \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{q \text{ vezes}} &\rightarrow T_{p-1}^{q-1}(V), \\ (v_1, \dots, v_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q) &\mapsto \alpha_1(v_1)(v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_q)\end{aligned} \quad (5.27)$$

que é claramente multilinear, e portanto existe uma aplicação linear $T_p^q(V) \rightarrow T_{p-1}^{q-1}(V)$ tal que

$$(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_q) \mapsto \alpha_1(v_1)(v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_q)$$

▷ **Exemplo 30:** Dado $V = \mathbb{R}^3$, considere o tensor $A = e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 \in T_1^2(V)$. Portanto a contração de A é dada por $e^1(e_1)e_2 = e_2 \in T_0^1(V)$ ◁

► **Definição 17:** Seja G um grupo abeliano. Um espaço vetorial V é dito ser graduado por um grupo abeliano G se V for expresso como uma soma direta $V = \oplus_i V_i$ de subespaços, indexada por elementos $i \in G$. Aqui consideraremos apenas os casos quando G é dado por $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$. Os elementos de V_i são chamados homogêneos de grau i , e definimos grau $(v) = i$, se $v \in V_i$.

Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é G -graduada se seu espaço vetorial subjacente V for G -graduado, ou seja, se existem subespaços $\mathcal{A}_k$ ($k \in G$) tais que $\mathcal{A} = \oplus_k \mathcal{A}_k$ e se dados $x_k \in \mathcal{A}_k$, $y_l \in \mathcal{A}_l$ temos $x_k y_l \in \mathcal{A}_{k+l}$. Os elementos de $\mathcal{A}_k$ são ditos homogêneos de grau k . O número k é denominado grau de $x_k \in \mathcal{A}_k$ e será denotado por $\deg(x_k)$ ou $|x_k|$. ◀

Como G é abeliano temos $\deg(x_k y_l) = \deg(x_k) + \deg(y_l)$. Para os escalares $a \in \mathbb{K}$ temos $\deg(a) = 0$.

► **Ex.168:** Mostre que o anel dos polinômios é $\mathbb{Z}_2$ -graduado ◀

A soma direta de todos os espaços vetoriais $T_p^q(V)$ munida da operação de soma e produto tensorial chama-se álgebra tensorial do espaço vetorial V . A álgebra tensorial é uma álgebra graduada. No caso geral a graduação é dada por $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De fato, a álgebra tensorial dos tensores contravariantes

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_p(V) \quad (5.28)$$

é $\mathbb{Z}$ -graduada, já que

$$T_p(V) \otimes T_q(V) \subset T_{p+q}(V),$$

enquanto que a álgebra tensorial dos tensores covariantes

$$T^*(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V) \quad (5.29)$$

é também $\mathbb{Z}$ -graduada, pois

$$T^p(V) \otimes T^q(V) \subset T^{p+q}(V)$$

Em particular,

► **Ex.169:** Mostre que $T^*(V)$ é a álgebra das funções multilineares em V ◀

Automorfismos da Álgebra Tensorial

Considerando qualquer uma das álgebras $T(V)$ ou $T^*(V)$, o fato de cada uma delas ser uma álgebra $\mathbb{Z}$ -graduada permite definir uma aplicação denominada *involução graduada*. Tomemos sem perda de generalidade a álgebra $T^*(V)$. A involução graduada é definida como sendo a aplicação

$$\widehat{A^p} = (-1)^{|A^p|} A^p = (-1)^p A^p, \quad (5.30)$$

onde $A^p \in T^p(V) \subset T^*(V)$ é um tensor covariante de ordem p .

► **Exemplo 31:** Podemos mostrar que a involução graduada é um automorfismo. De fato,

$$\begin{aligned} \widehat{(A^p \otimes B^q)} &= (-1)^{|A^p \otimes B^q|} (A^p \otimes B^q) \\ &= (-1)^{|A^p| + |B^q|} (A^p \otimes B^q) = (-1)^{|A^p|} A^p \otimes (-1)^{|B^q|} B^q \\ &= (\widehat{A^p}) \otimes (\widehat{B^q}) \end{aligned} \quad (5.31)$$

◀

▷ **Ex.170:** Qual é a ordem de tal automorfismo? ◁

► **Obs.20:** Denotaremos opcionalmente $\hat{A}$ por $\#A$, onde $A \in T(v)$ ou $A \in T^*(V)$ ◀

Dizemos que um elemento $A^p \in T^p(V)$ é par ou ímpar conforme $(-1)^p$ seja par ou ímpar. Podemos então definir os operadores

$$\begin{aligned}\Pi_{\pm}T(V) &\rightarrow T(V) \\ A &\mapsto \frac{1}{2}(1 \pm \#)A\end{aligned}\quad (5.32)$$

▷ **Ex.171:** Mostre que $\Pi_{\pm}$ são projeções ◁

O subespaço $T_+^*(V) = \Pi_+(T^*(V))$ consiste dos elementos pares de $T^*(V)$, enquanto que o subespaço $T_-^*(V) = \Pi_-(T^*(V))$ consiste dos elementos ímpares, e podemos escrever

$$T^*(V) = T_+^*(V) \oplus T_-^*(V)$$

▷ **Ex.172:** Mostre tal afirmação (Dica: mostre que $\Pi_+ + \Pi_- = 1$ e que $\Pi_{\pm}\Pi_{\mp} = 0$) ◁

e temos

$$\begin{aligned}T_+^*(V) \otimes T_+^*(V) &\subset T_+^*(V), & T_+^*(V) \otimes T_-^*(V) &\subset T_-^*(V) \\ T_-^*(V) \otimes T_+^*(V) &\subset T_-^*(V), & T_-^*(V) \otimes T_-^*(V) &\subset T_+^*(V)\end{aligned}\quad (5.33)$$

▷ **Ex.173:** $T_+^*(V)$ e $T_-^*(V)$ são subálgebras de $T^*(V)$? ◁

Além da $\mathbb{Z}$ -gradação inerente à álgebra dos tensores covariantes (ou contravariantes), a involução graduada ainda mune tais álgebras com uma $\mathbb{Z}_2$ -gradação.

A álgebra tensorial é isomorfa à sua álgebra oposta, a partir de um (anti-)automorfismo chamado reversão. Essa aplicação é definida por

$$(\widetilde{A^p \otimes B^q}) = \widetilde{B^q} \otimes \widetilde{A^p}$$

onde $A^p \in T^p(V)$, $B^q \in T^q(V)$, com $\tilde{a} = a$ se $a \in \mathbb{K}$ e $\tilde{\alpha} = \alpha$ se $\alpha \in V^* = T^1(V)$.

A partir dessas definições podemos ver que

$$(\alpha_1 \otimes \widetilde{\alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_p}) = \alpha_p \otimes \alpha_{p-1} \otimes \cdots \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_1$$

o que justifica a denominação reversão.

A composição da involução graduada e da reversão é denominada conjugação e é denotada por

$$\overline{A^p} = \widetilde{\widetilde{A^p}}$$

▷ **Ex.174:** Calcule a involução graduada, a reversão e a conjugação dos seguintes elementos: a) $\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \alpha_3 \in T^3(V)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V^*$; b) $\alpha_1 \otimes \alpha_2 - \alpha_3 \otimes \alpha_2 \in T^2(V)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in V^*$ ◁

5.4 Álgebra exterior

5.4.1 O produto exterior

► **Definição 18:** A p -ésima potência exterior de V é um espaço vetorial $\Lambda^p(V)$ juntamente com um mapa p -linear

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\text{vezes}} \mapsto \Lambda^p(V)$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mapsto \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

de tal maneira que os covetores $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p}$ formam uma base de $\Lambda^p(V)$ ◀

Uma vez definida a álgebra exterior, iremos ver sua interrelação com os tensores anti-simétricos, bem como outros diversos aspectos formais e computacionais.

Dados $\alpha, \beta \in V^*$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, definimos¹ o produto exterior entre dois covetores $\alpha \wedge \beta$ — agindo em $u, v \in V$ como

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \text{ALT}(\alpha \otimes \beta) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha(\mathbf{v}) & \alpha(\mathbf{u}) \\ \beta(\mathbf{v}) & \beta(\mathbf{u}) \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{u}) - \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v})) = \frac{1}{2}[(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - (\beta \otimes \alpha)(\mathbf{v}, \mathbf{u})].$$

Como essa expressão é válida para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, concluímos que

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha) = -\beta \wedge \alpha$$

Tal produto é bilinear e distributivo em relação à adição. Também notamos que $\alpha \wedge \alpha = 0$. O conjunto desses funcionais bilineares alternados é um subespaço de $T^2(V)$, denotado por $\Lambda^2(V)$. É comum denotarmos $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ e $\Lambda^1(V) = V^*$. Um 2-covetor é dito *simples*, ou fatorizável, se ele puder ser escrito na forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, onde α_1 e α_2 são covetores.

Uma generalização natural da definição dada acima é feita para um elemento de $\Lambda^k(V)$:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \alpha_1(\mathbf{v}_1) & \alpha_1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_1(\mathbf{v}_k) \\ \alpha_2(\mathbf{v}_1) & \alpha_2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_2(\mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(\mathbf{v}_1) & \alpha_k(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha_k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}$$

O conjunto dos funcionais k -lineares alternados formam um espaço vetorial $\Lambda^k(V)$ e seus elementos serão ditos *k-covetores*. Definimos produtos de p -covetores simples como

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m) \wedge (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_l) = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_m \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_l.$$

Note que se $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\phi_m \in \Lambda^m(V)$, então $\psi_k \wedge \phi_m = (-1)^{mk} \phi_m \wedge \psi_k$.

¹Alguns autores não usam o fator $1/2!$. Preferimos usar essa definição pois assim $\alpha \wedge \beta = \text{ALT}(\alpha \otimes \beta)$ e o operador ALT depende do fator $p!$ para ser um operador de projeção.

▷ **Ex.175:** Prove isso! ◁

Álgebras graduadas que possuem tal propriedade são denominadas *superálgebras*.

Uma base para o espaço $\Lambda^p(V)$ pode ser obtida a partir de uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V . Primeiramente consideraremos o espaço $\Lambda^2(V)$ e os produtos exteriores da forma $e^i \wedge e^j$. Devido à anti-comutatividade do produto exterior de covetores, os únicos 2-covetores linearmente independentes dessa forma são

$$\begin{aligned} e^1 \wedge e^2, e^1 \wedge e^3, e^1 \wedge e^4, \dots, e^1 \wedge e^n, \\ e^2 \wedge e^3, e^2 \wedge e^4, \dots, e^2 \wedge e^n, \\ \dots \\ e^{n-1} \wedge e^n \end{aligned}$$

o que corresponde a $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n(n-1)/2$ elementos, exatamente a $\dim \Lambda^2(V)$. Este conjunto de 2-covetores forma uma base para $\Lambda^2(V)$ e portanto um 2-covetor arbitrário $A \in \Lambda^2(V)$ pode ser escrito na forma

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} e^i \wedge e^j = \sum_{i < j} A_{ij} e^i \wedge e^j$$

Na primeira expressão acima há um fator $1/2$, ausente na segunda expressão, pois na soma $\sum_{ij}$ consideramos todos os valores dos índices $i, j = 1, 2, \dots, n$ e como $A_{ij} = -A_{ji}$ e $e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i$, estamos com isso contando duas vezes um mesmo termo, daí a divisão por dois. Considerando na segunda soma índices tais que $i < j$, nesse caso nenhum termo é contado duas vezes.

Generalizando esse resultado para k -covetores, uma base para o espaço $\Lambda^k(V)$ é da forma $e^{\mu_1} \wedge e^{\mu_2} \wedge \dots \wedge e^{\mu_k}$ e o número de elementos distintos consiste na combinação de n elementos tomados k a k , que é dada por $\binom{n}{k}$. Dado $a \in \Lambda^k(V)$, tal elemento pode ser escrito como

$$\psi_k = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k} a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} e^{\mu_1} \wedge e^{\mu_2} \wedge \dots \wedge e^{\mu_k}, \quad a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \in \mathbb{K}. \quad (5.34)$$

A dimensão de $\Lambda^k(V)$ é dada por

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} \quad (5.35)$$

Portanto

$$\dim \Lambda^k(V) = \dim \Lambda^{n-k}(V) \quad (5.36)$$

► **Lema 8:** O produto exterior de m covetores se anula sempre que $m > n$, onde $n = \dim V$ ◀

Prova: De fato, considere o produto $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{n+1}$. Se $\dim V^* = n$, temos no máximo n covetores $\{\alpha_i\}$ linearmente independentes. Sem perda de generalidade, escolha a combinação linear $\alpha_{n+1} = \sum_{i=1}^n a^i \alpha_i$. Portanto

$$\begin{aligned} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{n+1} &= \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge (a^1 \alpha_1 + \dots + a^n \alpha_n) \\ &= (-1)^{n-1} a^1 \alpha_1 \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n + \dots + a^n \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_{n-1} \wedge \alpha_n \wedge \alpha_n \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

já que $\alpha_i \wedge \alpha_i = 0, \forall \alpha_i \in \Lambda^1(V)$.

Isso mostra que o espaço $\Lambda^k(V)$ não existe, se $k > n$. Em particular, $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$ e os elementos de $\Lambda^n(V)$ são denominados *pseudoescalares*, enquanto que os k -covetores também recebe o nome de *k-formas*.

► **Proposição 12:** *Seja $u \in V$ um vetor não-nulo. Então $u \wedge v = 0$ se e somente se $v = au$, para algum escalar $a \in \mathbb{K}$* ◀

Prova: Se $v = au$, então $u \wedge v = u \wedge (au) = a(u \wedge u) = 0$. Reciprocamente, se $v \neq au$, então u e v são L.I., e podem ser estendidos a uma base, e portanto $u \wedge v$ é um vetor da base de $\Lambda^2(V)$, e portanto um elemento não-nulo.

Ao efetuarmos a multiplicação exterior entre 1-formas, obtemos 2-formas, 3-formas, $\dots$, k -formas ($1 \leq k \leq n$), dependendo do número de vezes que efetuamos o produto exterior (o mesmo vale para os vetores). Cada k -forma pertence a uma álgebra $\Lambda^k(V)$. Além disso essa álgebra não é fechada em relação ao produto exterior, pois se $\Psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\Psi_m \in \Lambda^m(V)$ então vemos que $\Psi_k \wedge \Psi_m \in \Lambda^{m+k}(V)$. Para contornarmos essa situação não desejada, definimos

$$\Lambda(V) = \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \dots \oplus \Lambda^n(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)$$

► **Teorema 41:** *Seja $0 \neq \psi \in \Lambda^2(V^*)$. Então ψ é fatorizável se e somente se $\psi \wedge \psi = 0 \in \Lambda^4(V)$* ◀

Prova: Se $\psi = u \wedge v$, $u, v \in V$, então $\psi \wedge \psi = u \wedge v \wedge u \wedge v = 0$. A recíproca será provada por indução na dimensão de V . Se $\dim V = 0$ ou 1 , então $\Lambda^2(V) = 0$, e portanto o primeiro caso é quando $\dim V = 2$. Nesse caso $\dim \Lambda^2(V) = 1$ e $v_1 \wedge v_2$ é um elemento não nulo se $\{v_1, v_2\}$ for base de V , sendo ψ fatorizável.

O caso em que $\dim V = 3$ consideramos separadamente agora. Dado $0 \neq \psi \in \Lambda^2(V)$, defina uma aplicação $A : V \rightarrow \Lambda^3(V)$ por $A(v) = \psi \wedge v$. Como $\dim \Lambda^3(V) = 1$, então $\dim \ker A \geq 2$, e sejam u_1 e u_2 vetores L.I. em $\ker A$. Estenda a uma base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de V , e podemos escrever

$$\psi = au_1 \wedge u_2 + bu_1 \wedge u_3 + cu_2 \wedge u_3$$

Por definição $A(u_1) = 0$, e portanto $0 = \psi \wedge u_1 = cu_1 \wedge u_2 \wedge u_3$, implicando em $c = 0$. Da mesma maneira $A(u_2) = 0$, e portanto $0 = \psi \wedge u_2 = -bu_1 \wedge u_2 \wedge u_3$, o que significa que $b = 0$. Segue-se que

$$\psi = au_1 \wedge u_2$$

, que é fatorizável. Assuma agora por indução que a afirmação é verdadeira para $\dim V \leq n-1$ e considere o caso onde $\dim V = n$. Usando a base $v_1, \dots, v_n$, escreva

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{1 \leq i < j}^n a_{ij} v_i \wedge v_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} v_i \right) \wedge v_n + \sum_{1 \leq i < j}^{n-1} a_{ij} v_i \wedge v_j \\ &= u \wedge v_n + \psi' \end{aligned}$$

onde $U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, $u \in U$ e $\psi' \in \Lambda^2(V)$.

Agora,

$$0 = \psi \wedge \psi = (u \wedge v_n + \psi') \wedge (u \wedge v_n + \psi') = 2u \wedge \psi' \wedge v_n + \psi' \wedge \psi'$$

mas v_n não aparece nem na expansão de $u \wedge \psi'$ nem na de $\psi' \wedge \psi'$, e separadamente obtemos $u \wedge \psi' = 0 = \psi' \wedge \psi'$. Por indução, $0 = \psi' \wedge \psi'$ implica em $\psi' = u_1 \wedge u_2$, e $u \wedge u_1 \wedge u_2 \psi' = 0$. Portanto existem $\mu, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ tais que $\mu u + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 u_1 = 0$. Se $\mu = 0$, então u_1 e u_2 são L.D., e portanto $\psi' = u_1 \wedge u_2 = 0$, significando que $\psi = u \wedge v_n$, e portanto ψ é fatorizável. Se $\mu \neq 0$, então $u = \lambda_2/\mu u_2 + \lambda_1/\mu u_1$, e

$$\psi = \lambda_1 u_1 \wedge v_n + \lambda_2 u_2 \wedge v_n + u_1 \wedge u_2$$

, sendo esse o caso 3-dimensional, o qual provamos que sempre é fatorizável ■

▷ **Ex.176:** Considere $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ um conjunto L.I. de um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V . Calcule $\psi \wedge \phi$ nos seguintes casos:

1. $\psi = \phi = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_3 + v_3 \wedge v_1$
2. $\psi = v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_1, \quad \phi = v_2 \wedge v_3 \wedge v_4$

◁

Dada uma base $\{e_i\}$ de vetores unitários de V e a correspondente base dual $\{e^i\}$, ao considerarmos uma variedade M e $\{x^i\}$ coordenadas locais definidas em um aberto $U \subseteq M$ podemos escrever $e^i = dx^i$ e $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ temos $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$, podemos escrever uma multiforma diferencial $\Psi \in \Lambda^*(V)$ como

$$\Psi = a + \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \cdots + p dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (5.38)$$

onde $a, a_i, a_{ij}, \dots, p \in \mathbb{K}$

► **Definição 19:** O par $(\Lambda(V), \wedge)$ é denominado *álgebra exterior* do espaço vetorial V . De maneira análoga pode ser definida a álgebra exterior $\Lambda(V^*)$, onde passamos a considerar o produto exterior de vetores. ◀

Uma base para o espaço $\Lambda^k(V)$ é da forma $\{e^{\mu_1} \wedge e^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge e^{\mu_k}\}$ e o número de elementos distintos de $\Lambda^k(V)$ consiste na combinação de n elementos tomados k a k , que é dada por $\binom{n}{k}$. Um elemento $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ pode ser escrito como

▷ **Ex.177:** Dada uma base $\{e_i\}$ de V — um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial n -dimensional — expresse $e_n \wedge e_{n-1} \wedge \cdots \wedge e_2 \wedge e_1$ em termos de $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{n-1} \wedge e_n$ ◁

▷ **Ex.178:** Em um espaço vetorial $V = \mathbb{R}^3$, dados $A, B, C \in \Lambda(V)$, onde $A = 3 + 3e^1 + e^2 \wedge e^3$, $B = -e^2 + 4e^1 \wedge e^2 \wedge e^3$ e $C = 1 + e^3 + e^1 \wedge e^3$ calcule

1. $A \wedge A, B \wedge B, C \wedge C, B \wedge A, A \wedge B, C \wedge A, A \wedge C, B \wedge C, C \wedge B, A \wedge B \wedge C, A \wedge C \wedge C$
2. $\langle A \wedge B \rangle_0; \langle A \wedge B \rangle_1; \langle A \wedge B \rangle_2; \langle A \wedge B \rangle_3$
3. $\langle A \wedge C \rangle_0; \langle A \wedge C \rangle_1; \langle A \wedge C \rangle_2; \langle A \wedge C \rangle_3$
4. $\langle B \wedge C \rangle_0; \langle B \wedge C \rangle_1; \langle B \wedge C \rangle_2; \langle B \wedge C \rangle_3$

◁

▷ **Ex.179:** Considere $\{u^1, u^2, \dots, u^{2r-1}, u^{2r}\}$ vetores duais L.I. em um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial V . Seja $v = u^1 \wedge u^2 + u^3 \wedge u^4 + u^5 \wedge u^6 + \dots + u^{2r-1} \wedge u^{2r}$, mostre que

$$\underbrace{v \wedge v \wedge \dots \wedge v}_{r \text{ vezes}} = r! (u^1 \wedge u^2 \wedge \dots \wedge u^{2r-1} \wedge u^{2r})$$

◁

Em muitos casos estamos interessados em trabalhar com formas diferenciais em variedades. Considere por exemplo uma variedade M e $\{x^i\}$ coordenadas locais definidas em um aberto $U \subseteq M$. Tomando $\mathbf{e}^i = dx^i$ e $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, então $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$. Nesse caso podemos escrever uma forma diferencial $\Psi \in \Lambda(V)$ como

$$\Psi = a + \sum_{i=1}^n a_i dx^i + \sum_{i < j}^n a_{ij} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i < j < k}^n a_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \dots + p dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (5.39)$$

onde $a, a_i, a_{ij}, \dots, p \in \mathbb{K}$

► **Definição 20:** O par $(\Lambda(V), \wedge)$ é denominado **álgebra exterior** do espaço vetorial V^* . De maneira análoga pode ser definida a álgebra exterior $\Lambda(V)$, onde passamos a considerar o produto exterior de vetores ◀

Finalmente, $\dim \Lambda(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

▷ **Ex.180:** Mostre que todo p -covetor em um espaço V tal que $\dim V \leq 3$ é simples ◁

▷ **Ex.181:** Para $\dim V \geq 4$ nem todo p -vetor é simples. Por exemplo, seja V um espaço vetorial de dimensão 4 e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ uma base de V . Seja $\psi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Mostre que não existe nenhuma combinação linear dos vetores $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) que permita escrever ψ na forma $\psi = v^1 \wedge v^2$ ◁

A seguir daremos uma definição equivalente de álgebra exterior.

► **Definição 21:** Um mapa $\phi : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ vezes}} \rightarrow U$ é dito anti-simétrico se

$$\phi(v_{i_1}, \dots, v_{i_p}) = \text{sign}(i_1, \dots, i + p) \phi(v_1, \dots, v_p)$$

para qualquer permutação dos índices $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^n$. O termo $\text{sign}(i_1, \dots, i + p)$ denota o sinal de tal permutação. Quando $U = \mathbb{K}$, o mapa ϕ é dito ser uma aplicação multilinear anti-simétrica. ◀

▷ **Ex.182:** Existem $A, B \in \Lambda(V)$, ambos não-nulos tais que $A \wedge B = 0$? ◁

► **Obs.21:** O espaço $\Lambda^p(V)$ pode ser identificado com o subespaço dos tensores anti-simétricos em $T^p(V)$ ◀

5.4.2 Operações dentro da álgebra exterior

Como a álgebra exterior é formada pela parte alternada da álgebra tensorial, os (anti-)automorfismos definidos para a álgebra tensorial induzem os mesmos automorfismos definidos para a álgebra exterior, que explicitaremos a seguir, devido a sua tamanha importância.

A projeção

$$\langle \rangle_k : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda^k(V) \quad (5.40)$$

é definida de modo que $\langle \Psi \rangle_k$ denota a parte k -covetorial de $\Psi \in \Lambda(V)$.

A reversão é definida como $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)^\sim = \alpha_k \wedge \alpha_{k-1} \wedge \cdots \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_1 = (-1)^{k(k-1)/2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$.

Já a ação da involução graduada em $\Psi \in \Lambda(V)$ é denotada como no caso da álgebra tensorial por $\widehat{\Psi}_k = \#(\Psi_k) = (-1)^k \Psi_k$. Este automorfismo é usado para definirmos uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação em $\Lambda(V)$. Os $\mathbb{Z}_2$ -subespaços homogêneos consistem na soma de todos os $\mathbb{Z}$ -subespaços de grau par e ímpar, onde o grau do subespaço se refere ao autovalor ± 1 do operador $\#$, já que os $\mathbb{Z}$ -subespaços homogêneos são autoespaços do operador $\#$.

A conjugação é analogamente definida como sendo a composição da reversão com a involução graduada, e é denotada por $\bar{\Psi} = (\tilde{\Psi}) = \hat{\Psi}$.

A aplicação linear $\alpha : V \rightarrow \mathbb{K}$ foi definida como um elemento do espaço dual V^* . Podemos generalizar esse conceito, introduzindo uma operação denominada *contração à esquerda* pelo vetor $\mathbf{v}$, que age sobre $\Omega \in \Lambda^k(V)$ e resulta em um elemento de $\Lambda^{k-1}(V)$, da seguinte maneira:

$$(\mathbf{v} \lrcorner \Omega_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k \Omega_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}). \quad (5.41)$$

No caso em que $k = 1$, a definição se reduz a $\mathbf{v} \lrcorner \alpha = \alpha(\mathbf{v})$. Para $a \in \mathbb{R}$, temos $\mathbf{v} \lrcorner a = 0$. A definição dada acima não é útil do ponto de vista computacional. Vamos considerar a contração de $\alpha \wedge \beta$ por um vetor $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} \lrcorner (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{u}) = (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\alpha(\mathbf{v})\beta - \beta(\mathbf{v})\alpha)(\mathbf{u}) = ((\mathbf{v} \lrcorner \alpha)\beta - (\mathbf{v} \lrcorner \beta)\alpha)(\mathbf{u}).$$

A generalização dessa equação para multivetores Ψ e Φ arbitrários é dada pela *regra de Leibniz graduada*:

$$\mathbf{v} \lrcorner (\Psi \wedge \Phi) = (\mathbf{v} \lrcorner \Psi) \wedge \Phi + \hat{\Psi} \wedge (\mathbf{v} \lrcorner \Phi) \quad (5.42)$$

A definição de *contração à direita* é feita de maneira semelhante:

$$(\Omega \llcorner \mathbf{v})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k \Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}) \quad (5.43)$$

e a regra de Leibniz graduada para a contração à direita é expressa como

$$(\Psi \wedge \Phi) \llcorner \mathbf{v} = \Psi \wedge (\Phi \llcorner \mathbf{v}) + (\Psi \llcorner \mathbf{v}) \wedge \hat{\Phi} \quad (5.44)$$

A contração à esquerda se relaciona com a contração à direita por:

$$\mathbf{v} \lrcorner \Psi = -\hat{\Psi} \llcorner \mathbf{v} \quad (5.45)$$

onde $\Psi \in \Lambda(V)$.

Podemos não somente nos restringir à contração por vetores, mas por k -vetores (ou de modo mais geral, por multivetores, estendendo-se o caso dos k -vetores por linearidade). Dado um k -vetor $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k$, definimos

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) \lrcorner = \mathbf{v}_1 \lrcorner \mathbf{v}_2 \lrcorner \cdots \mathbf{v}_k \lrcorner$$

e

$$\boxed{\lrcorner(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k) = \lrcorner \mathbf{v}_1 \lrcorner \mathbf{v}_2 \cdots \lrcorner \mathbf{v}_k} \quad (5.46)$$

Essa definição é natural de maneira que o operador $\lrcorner$ seja o dual do operador $\wedge$. Segue-se que a contração de um q -vetor por um p -vetor se anula para $p > q$. A mesma generalização pode ser feita para multivetores.

Bibliography

- [1] K. Hoffman e R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, New Jersey 1971.
- [2] A. I. Kostrikin e Yu. I. Manin, *Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach, New York 1981.
- [3] G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover, New York 1977.
- [4] Elon Lages Lima, *Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro 2005.
- [5] Elon Lages Lima, *Álgebra Exterior*, Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro 2005.
- [6] E. B. Vinberg, *A Course in Algebra*, Graduate Studies in Mathematics **56**, AMS, Providence 2003.
- [7] J. Vaz, *Notas de Aula MT-307*, [<http://www.ime.unicamp.br/%7Evaz/mt307a05.htm>]
- [8] I. M. Gel'fand, *Lectures on Linear Algebra*, Dover, New York 1989.
- [9] P. Halmos, *Finite-dimensional Vector Spaces*, Springer-Verlag, Heidelberg 1974.
- [10] H. Grassmann, *Die lineare Ausdehnungslehre*, Leipzig Wiegand 1844. English translation, 1995, by Lloyd Kannenberg, *A new branch of mathematics*, Chicago: Open Court.